Felix Hausdorffs Erkenntniskritik von Zeit und Raum

Moritz Epple

Der nachfolgende Text ist veröffentlicht als Einleitung des Herausgebers in:

Felix Hausdorff: Gesammelte Werke, Band VI: *Geometrie, Raum und Zeit.*
Herausgegeben von Moritz Epple. Heidelberg: Springer, 2020.

Korrekturstand: 16. November 2021.

Vorwort

„Der Gegenwartpunkt bewegt sich auf der Zeitlinie in ganz beliebiger, stetiger oder unstetiger Weise.“ So lautet Paul Mongrés „Fundamentalsatz“ über die Zeit. Ähnliches kann auch über den Verlauf der Arbeit an diesem Band gesagt werden. Begonnen vor vielen Jahren, verlief die Beschäftigung mit den Materialien, die hier ediert sind, aus sehr unterschiedlichen Gründen in variabler Geschwindigkeit, und sie wurde aus Gründen, die von anderweitigen beruflichen Ansprüchen bis zu den unvorhergesehenen Härten des Lebens reichen, immer wieder unterbrochen. Umso dankbarer bin ich, dass das Ergebnis meiner langjährigen Bemühungen nun der Öffentlichkeit übergeben werden kann.

Es ist meine Hoffnung, dass mit dem vorliegenden Band neues Licht auf eine bedeutende, bislang nur in groben Umrissen bekannte erkenntniskritische Leistung geworfen werden kann, die im Übergang vom 19. zum 20. Jahrhundert entstand, und die vielleicht – auch im Bewusstsein ihres Autors – zu den damals radikalsten Entwürfen einer kritischen Wissenschaftsphilosophie von Zeit und Raum gehört. Wie der Band vor Augen führt, hat Felix Hausdorff die entschiedene Erkenntniskritik, die er unter dem Pseudonym Paul Mongré in seiner 1898 erschienenen Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* skizzierte, in allen Phasen seines intellektuellen Lebens fortgeführt und in verschiedenen Hinsichten präzisiert und erweitert. Die hier edierten Schriten, darunter viele erstmals gedruckte Materialien aus dem umfangreichen wissenschaftlichen Nachlass, erlauben es, diese Bemühungen umfassender zu beurteilen, als dies bisher möglich war.

Am Zustandekommen dieses Bandes haben viele Personen einen sehr großen Anteil. Ein erster großer Dank gebührt dem verstorbenen Initiator der Edition Egbert Brieskorn, der mich früh in das Vorhaben der Gesammelten Werke Hausdorffs einbezog, und der mir dann im Rahmen eines Lehrauftrags am Mathematischen Institut der Universität Bonn die Möglichkeit gab, die Arbeit der Edition aus der Nähe kennenzulernen. Dort habe ich dann auch den Koordinator der Edition Walter Purkert näher kennengelernt, ohne dessen kontinuierliche Unterstützung und Rat weder die Edition noch dieser Band erfolgreich zu Ende geführt worden wäre. Mit ihm und dem Mitherausgeber der Edition Erhard Scholz verbindet mich eine lange Freundschaft; beide zählen zu jenen, in deren Schriften ich eine kritische Geschichte der Mathematik – namentlich der Geometrie und der Mengenlehre – zuerst kennengelernt habe. Durch die interdisziplinäre Arbeit der Edition habe ich andere Editoren kennengelernt, die mir vor allem den Blick auf die philosophischen und literarischen Werke Hausdorffs erweitert haben. Auch Werner Stegmaier, dem Herausgeber von Band VII und Friedrich Vollhardt, dem Herausgeber von Band VIII, sei daher hier ein herzlicher Dank ausgesprochen.

Alle diese Editoren, ihre Mitarbeiter und viele Gäste der Edition haben sich mehrmals in Schloss Rauischholzhausen zu Tagungen über Hausdorffs philosophische, literarische und wissenschaftstheoretische Bemühungen im historischen Kontext getroffen. Wenn es möglich wäre, einem *genius loci* zu danken, so müsste hier nicht nur allen Teilnehmern an diesen Tagungen, sondern auch diesem Schlösschen und seinem schönen Park der größte Dank gesagt werden. So war die Arbeit an diesem Band sicherlich eine bisweilen unstetige Bewegung, zugleich aber auch immer eingebettet in eine gemeinsame Beschäftigung mit den vielfältigen Themen der Hausdorffschen Schriften.

Steinbach am Taunus, im Mai 2020
Moritz Epple

Abkürzungsverzeichnis

KrV	Immanuel Kant, *Critik der reinen Vernunft.* Zitiert wird nach der Originalausgabe (A), Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1781, [Kant 1781], und der zweiten Ausgabe (B), Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1787, [Kant 1787].
Prolegomena	Immanuel Kant: *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1783, [Kant 1783].
Anfangsgründe	Immanuel Kant: *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft.* Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1786, [Kant 1786].
Analysis	Otto Liebmann: *Zur Analysis der Wirklichkeit: Philosophische Untersuchungen.* Straßburg: Karl J. Trübner, 1876, [Liebmann 1876].
Grundlagen	David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig: Teubner, 1899, [Hilbert 1899].
Sant' Ilario	Paul Mongré: *Sant' Ilario – Gedanken aus der Landschaft Zarathustras.* Leipzig: C. G. Naumann, 1897, [H 1897b]. In HGW, Band VII.
Das Chaos in kosmischer Auslese	Paul Mongré: *Das Chaos in kosmischer Auslese.* Leipzig: C. G. Naumann, 1898, [H 1898a]. In HGW, Band VII.
Das Raumproblem	Felix Hausdorff: „Das Raumproblem." *Ostwalds Annalen der Naturphilosophie* 3 (1903), 1-23, [H 1903a]. In diesem Band.
Zeit und Raum	Felix Hausdorff: Vorlesung *Zeit und Raum.* Leipzig, Wintersemester 1903/1904. In diesem Band.
Grundzüge	Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: Veit & Co., 1914, [H 1914a]. In HGW, Band II.

In der vorstehenden Liste nicht genannte Schriften Felix Hausdorffs werden nach den in dieser Edition üblichen Siglen zitiert, welche im vollständigen Schriftenverzeichnis Felix Hausdorffs auf den vorangehenden Seiten aufgelöst sind. Alle Literaturangaben der Form [H 1897b], [H 1914a] usw. beziehen sich auf dieses Schriftenverzeichnis. Die im vorliegenden Band abgedruckten Publikationen Hausdorffs sind darin mit einem Stern gekennzeichnet. Auf andere Bände dieser Edition wird mit der Abkürzung HGW und der Angabe der Bandnummer verwiesen. Hinweise auf den umfangreichen wissenschaftlichen Nachlass Hausdorffs an der Universitäts- und Landesbibliothek Bonn werden mit der Abkürzung NL Hausdorff und der betreffenden Faszikelnummer gegeben. Das ausführliche Findbuch zum Nachlass kann bei der ULB Bonn online eingesehen werden: *https://www.ulb.uni-bonn.de/de/sammlungen/nachlaesse/findbuecher-und-inhaltsverzeichnisse/hausdorff*.

Felix Hausdorffs Erkenntniskritik von Zeit und Raum

Moritz Epple

Inhalt

1. Einleitung

Der vorliegende Band vereinigt Texte und Manuskripte Hausdorffs, die sich im Grenzgebiet von Mathematik und Erkenntniskritik bewegen und die vor allem um die Themen Zeit, Raum und Geometrie kreisen. Da auch ein Teil von Hausdorffs literarischen Schriften sich mit diesen Themen auseinandersetzen, schlägt der Band Brücken zwischen den drei Hauptgebieten von Hausdorffs Werk.

Das hier zum ersten Mal veröffentlichte Manuskript von Hausdorffs Vorlesung *Zeit und Raum*, gehalten im Wintersemester 1903/1904 an der Universität Leipzig, beginnt mit den Worten: „Altes Problem, tausend Meinungen. Nicht reiner Vortrag, sondern Discussion, gemeinsames Suchen. Meine Leidenschaft für dies Problem.“ Diese Worte zeigen, dass die Thematik der mathematischen und erkenntniskritischen Analyse von Zeit- und Raumvorstellungen für Hausdorff zu dieser Zeit mehr war als nur ein Vorlesungsthema unter anderen. Es handelte sich um eine Thematik, die ihm am Herzen lag und im Zentrum seiner philosophischen Interessen stand. Schon der letzte Abschnitt des unter dem Pseudonym Paul Mongré erschienenen literarischen Erstlingswerkes, des Aphorismenbandes *Sant' Ilario*, behandelte dieselbe unter dem Titel „Zur Kritik des Erkennens“. Eine erkenntniskritische Untersuchung von Zeit und Raum sowie eines umfangreichen Bündels von daran geknüpften weiteren Vorstellungen von der Mechanik bis zur Ethik stand dann im Zentrum des zweiten Mongréschen Werkes, der 1898 erschienenen Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese.* Mongré griff sie auch mehrfach in seinen literarischen Essays auf und machte schließlich *Das Raumproblem* – nun unter eigenem Namen – zum Gegenstand seiner Antrittsvorlesung als Extraordinarius in Leipzig. Auch eine umfangreiche erhaltene Sammlung von Manuskripten im Nachlass zeigt, dass er sich immer wieder auf die angesprochene Suche begeben hat, und dass er nicht nur viele der „tausend Meinungen“ selbst kritisch gesichtet hat, sondern seine eigenen Überlegungen immer wieder aufgegriffen und weitergeführt hat. Vermutlich hatte er im Zusammenhang mit der Vorlesung von 1903/1904 zweitweise den Plan, eine weitere Monographie zur Thematik von Zeit und Raum zu verfassen. Einige der im vorliegenden Band versammelten Texte sind wahrscheinlich Vorarbeiten für diese Schrift. Auch wenn eine solche Monographie aus Gründen, die im Folgenden diskutiert werden, nie erschienen ist, lassen sich doch zumindest Teile der 1914 veröffentlichten *Grundzüge der Mengenlehre* auch als mathematische Früchte dieser Beschäftigung interpretieren, und noch 1919 empfahl Hausdorff seine frühere Erkenntniskritik dem inzwischen in Wien tätigen Philosophen Moritz Schlick, nachdem dieser *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik* zum Gegenstand einer eigenen knappen Monographie gemacht hatte.

So intensiv Hausdorffs Beschäftigung mit den Themen dieses Bandes war, so originell ist die erkenntniskritische Position, die er dabei über die Jahre hinweg ausarbeitete. Ausgehend von einer entschiedenen Kritik aller metaphysischen Konzepte einer absoluten Ordnung von Zeit und Raum – einem „transzendenten Nihilismus“, wie Hausdorff in *Das Chaos in kosmischer Auslese* formulierte – entwarf er eine zugleich empiristische und formalistische Epistemologie, die er als „geläuterten“ oder „besonnenen Empirismus“ bezeichnete. Diesem zufolge sind unserem Bewusstsein einzig die Zeugnisse der Sinne als „faits accomplis“ gegeben; sowohl die formal mathematische als auch die empirisch wissenschaftliche Beschreibung zeitlicher Ordnungen und räumlicher Strukturen hingegen ist in einer Vielfalt von Formen möglich, unter denen wir aus kontingenten (wenn auch vielleicht guten) Gründen auswählen. Die Erkenntniskritik, so Hausdorff, hat diesen Spielraum von Beschreibungsmöglichkeiten immer wieder erneut zu erkunden und zu bestimmen, um das wissenschaftliche Denken vor vermeintlichen Eindeutigkeiten und ungerechtfertigten metaphysischen Festlegungen zu bewahren. Für eine solche Erkenntniskritik liefert nicht zuletzt die formale Mathematik maßgebliche Werkzeuge.

Der nachfolgende Essay zeichnet die Umrisse des Feldes nach, in dem die Texte Hausdorffs im Überschneidungsgebiet von Mathematik, Philosophie und Literatur entstanden sind. Zum einen sollen die Kontexte, auf die Hausdorff sich bezog, benannt werden. Dabei erweist es sich als hilfreich, in knapper Form bis in die im späten 19. Jahrhundert vielfach diskutierten Aspekte der wissenschaftlichen Behandlung von Zeit und Raum im 17. Jahrhundert zurückzugehen. Wie für viele seiner Zeitgenossen, so bildeten auch für Hausdorff die Schriften Immanuel Kants einen wiederkehrenden Bezugspunkt der Ausführungen über Fragen der Zeit und des Raumes. Daher soll insbesondere Hausdorffs Lektüre dieser Texte hier näher dargestellt werden. Dasselbe gilt schließlich für die mathematikhistorischen, physikhistorischen und philosophiehistorischen Eckpunkte des komplexen Diskussionsfeldes im 19. Jahrhundert, das Hausdorffs Schriften und Manuskripte umfassend erkundet haben.

Zum anderen sollen einleitend drei deutlich unterschiedene Phasen von Hausdorffs Auseinandersetzung mit der Thematik des vorliegenden Bandes skizziert werden. Dies sind zunächst die erkenntniskritischen Überlegungen der 1890er-Jahre. Bereits während seines Studiums finden sich erste Spuren jener Motive, die dann seine an Nietzsche orientierten Schriften unter dem Namen Mongré durchziehen. Nicht zuletzt aus solchen Motiven heraus hat sich Hausdorff in den Jahren nach 1897 der jungen Theorie unendlicher Mengen Georg Cantors zugewandt. Zweitens muss auf die Jahre nach 1899 eingegangen werden, in denen Hausdorff durch seine Aufnahme der formalen mathematischen Axiomatik und seine endgültige Zuwendung zu Cantors Mengenlehre auch seine erkenntniskritischen Überlegungen entschiedener und präziser mit mathematischen, mathematikphilosophischen und wissenschaftstheoretischen Ausführungen verknüpfte. Drittens schließlich soll dargelegt werden, in welcher Weise Hausdorffs Epistemologie von Zeit und Raum Eingang in seine wissenschaftliche Tätigkeit und sein Werk nach 1905 gefunden hat.

Der vorliegende Band verbindet auch in der Edition der Gesammelten Werke Hausdorffs die mathematischen Bände I-V mit den Bänden VII und VIII, die dem schriftstellerischen Werk gewidmet sind. Wie bereits in dieser Einführung deutlich werden wird, erlaubt erst eine gemeinsame Lektüre beider Bereiche einen näheren Blick auf die erkenntniskritischen Bemühungen, die Hausdorff früh begann und in allen Phasen seiner intellektuellen Tätigkeit weiterführte.

Der anschließende Essay gibt keine vollständige Interpretation und Einordnung der reichhaltigen Überlegungen Hausdorffs über Zeit, Raum, Geometrie und die Grundbegriffe der Physik. Angesichts der Komplexität der Thematik können nur die für die hier zusammengestellten Texte Hausdorffs wichtigsten Aspekte skizziert und Literaturhinweise gegeben werden. Insbesondere soll in den Hauptlinien dargestellt werden, was dem Autor beim Abfassen seiner Schriften bekannt war und womit er sich unmittelbar auseinandersetzte. Der Nachweis, dass eine Lektüre und Interpretation der Texte Mongrés und Hausdorffs auch heute noch lohnend ist, sei jenen überlassen, die ihn allein führen können: den Leserinnen und Lesern dieses Bandes.

2. Ausgangspunkte

Eine Beschäftigung mit den Themen von Raum und Zeit aus mathematischer Sicht, wie sie im Zentrum der in diesem Band versammelten Arbeiten Hausdorffs steht, bewegte sich am Ende des 19. Jahrhunderts nicht in unbebautem Terrain. Im Gegenteil war eine zwischen Philosophie, Mathematik und Physik angesiedelte erkenntnistheoretische Bestimmung dieser Konzepte ebenso Bestandteil der Grundausbildung von Akademikern – namentlich von Vertretern der genannten Gebiete – wie sie zum guten Ton akademischer Selbstreflexion gehörte. Im deutschsprachigen Raum verband vor allem der in den 1870ern und 1880ern zunehmend zur Schulphilosophie gewordene Kantianismus eine sehr spezifische Fassung der Ideen von Zeit und Raum als „Formen der Anschauung" mit einer ebenso spezifischen Philosophie der Mathematik, und ein Großteil der seit dieser Zeit bis zur Jahrhundertwende geführten Debatten zum Thema drehte sich um eine weitere Präzisierung oder um eine Auseinandersetzung mit dieser Position. Dazu kamen allmählich auch empirische Befunde zur menschlichen Wahrnehmung von Zeit und Raum aus den sich langsam konstituierenden Gebieten der Wahrnehmungspsychologie und -physiologie. Beides, die postkantischen Debatten und die empirische Untersuchung von Zeit- und Raumwahrnehmung, kreuzte sich mit der rasanten Veränderung des mathematischen Gebietes der Geometrie, die nicht zuletzt durch die Verbreitung der nichteuklidischen Geometrien seit den späten 1860ern angestoßen wurde.

Auch wenn nirgendwo der Kantianismus solch eine Schlüsselrolle im akademischen Leben erhielt wie im deutschsprachigen Raum, ereignete sich diese Entwicklung nicht nur dort. In Frankreich, England, Italien, den USA und in anderen Ländern wurde im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts ebenfalls zunehmend über Geometrie, Zeit und Raum gestritten, auch dort arbeiteten sich viele an den Kantischen Konzepten ab, und auch dort begann eine empirische Untersuchung der Zeit- und Raumwahrnehmung. Namentlich in den Nummern französischer philosophischer Zeitschriften wie der *Revue de métaphysique et de morale* und der *Revue philosophique* häuften sich Dutzende von einschlägigen Aufsätzen.

Wenn ein junger Autor wie Hausdorff sich einem solchen Diskursfeld zuwandte, dann geschah dies nicht unabhängig von der angedeuteten Entwicklung. Im Gegenteil: Er wandte sich offenbar gerade deshalb den Themen von Raum, Zeit und Geometrie zu, weil er seine Stimme in diesem dichten Feld erheben wollte. Die Vorrede zu *Das Chaos in kosmischer Auslese* gibt einige Auskunft hierüber. Der Autor spricht hier nicht als Vertreter einer akademischen philosophischen Schule, sondern von dem unerwarteten Aufblitzen eines Gedankens, „der ungeheure Folgerungen zuzulassen scheint", vor „Demjenigen, der von Berufswegen gar nicht und durch persönliche Liebhaberei nur ungenügend zur Erfassung und Darstellung solcher Zusammenhänge ausgerüstet ist!"[1] Er deutet freilich an, dass er „nicht ohne Beeinflussung durch die Mathematik geblieben" sei, und hofft, dass „der erkenntnisstheoretische Radicalismus, den diese Schrift aufstellt", nicht nur die Vertreter der Philosophie und Mathematik, sondern „auch die allgemein Gebildeten philosophischer und naturwissenschaftlicher Färbung" zu einer Auseinandersetzung anrege.[2]

Auch die umfangreichen Notizen und Manuskripte, die Hausdorff zu verschiedenen Aspekten der Thematik über mehrere Jahre hin – mindestens von der Zeit der Abfassung von *Das Chaos in kosmischer Auslese* bis in die Jahre um 1905 – anfertigte, und die in Teilen umfangreiche Auszüge aus und kritische Kommentare zu der vorhandenen philosophischen Literatur enthalten, belegen, dass er sich das genannte Feld nicht nur aufmerksam aneignete, sondern sich auch kritisch einmischen wollte. Einige der Eckpunkte dieses Feldes seien im Folgenden benannt.

2.1 Grundlinien der Diskussion um Zeit und Raum in der frühen Neuzeit

Viele der Beiträge zu der Debatte um Zeit, Raum und Geometrie, die in den Jahren der Entstehung der Hausdorffschen Schriften geführt wurden, griffen bis in die Zeit der Formierung der neuzeitlichen europäischen Naturwissenschaft und Mathematik zurück, um die Problematik zu erläutern, an welcher sie sich abarbeiteten. Auch Hausdorffs Ausführungen beziehen sich immer wieder auf die in diesem Kontext verankerten Problemtraditionen.

2.1.1 Zeit, Raum, Bewegung: absolute vs. relative Konzeptionen

In seiner Leipziger Antrittsvorlesung *Das Raumproblem* betonte Hausdorff gleich zu Beginn, dass das unter diesem Titel zusammengefasste Problembündel nicht einer, sondern mehreren Wissenschaften angehörig sei und der Sache nach verschiedene Dimensionen habe – eine mathematische, eine objektive, und eine subjektive. Eine verwandte Trennung der Problemschichten spielte bereits in einem der frühesten für die neuzeitliche Naturwissenschaft paradigmatischen Texte eine zentrale Rolle, auf den sich auch Hausdorff wiederholt bezog: In Isaac Newtons Scholium zu den grundlegenden Definitionen im ersten Buch seines 1687 errschienenen Hauptwerkes *Philosophiae naturalis principia mathematica*.[3] Dieses Scholium, so erläuterte Newton, werde hilfreich sein, naheliegende Missverständnisse in den allgemein vertrauten Begriffen von Zeit, Raum, Ort und Bewegung zu beseitigen, die daher rührten, dass diese Größen üblicherweise stets mit Bezug auf die Gegenstände der Sinneswahrnehmung verstanden würden:

[1] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. III f.

[2] Ebd., S. V f.

[3] Vgl. [Newton 1999], S. 54-61. Den folgenden Zitaten liegt die englische Neuübersetzung der *Principia* von Anne Whitman und I. B. Cohen zugrunde. Übersetzungen im Text stammen vom Herausgeber. – Für direkte Bezugnahmen Hausdorffs vgl. u.a. das Kapitel „Vom Raume" in *Das Chaos in kosmischer Auslese*, dort zuerst S. 79.

> to eliminate [these preconceptions] it is useful to distinguish these quantities into absolute and relative, true and apparent, mathematical and common.[4]

Newtons vielzitierte Unterscheidung zwischen einer absoluten und relativen Zeit und dem absoluten und relativen Raum war mithin auch erkenntnis- und wissenschaftstheoretisch gemeint: Mit der Einführung der (für die mathematische Naturphilosophie Newtons grundlegenden) Konzepte einer absoluten räumlichen und zeitlichen Ordnung verbunden war der Anspruch, in diesem Rahmen eine Einsicht jenseits der alltäglich-sinnlichen Eindrücke von der Welt zu erreichen. Die mathematische Analyse der Erfahrung sollte die „wahren" Bewegungen der Körper erkennbar machen, um dann nach deren Ursachen fragen zu können. Newton verknüpfte diese Festlegungen mit einer näheren Charakterisierung der „wahren" Zeit und des „wahren" Raumes, die schon im 17. Jahrhundert Ausgangspunkt vieler Diskussionen wurde.[5] Absolute Zeit, so formulierte er, „fließt ohne Bezug auf irgendetwas Äußeres gleichmäßig"; der absolute Raum, ebenso ohne Beziehung auf Äußeres, „bleibt stets homogen und unbeweglich".[6]

Die grundlegenden Verfahren, die es nach Newton erlaubten, die absoluten Formen von Zeit, Raum und Bewegung doch als Gegenstand menschlicher Wissenschaften anzusehen, waren die der vergleichenden Messung und der Analyse der wirkenden Kräfte: Indem etwa die Astronomie verschiedene relative Zeitmaße und Positionsbestimmungen miteinander verglich, konnte es ihr gelingen, den wahren astronomischen Zeit- und Ortsangaben näher zu kommen. Aber auch diese blieben noch relativ, gebunden an die wissenschaftliche Auszeichnung eines allgemeinen Zeitmaßes und eines „Körpers, den wir als unbeweglich betrachten", auf welchen die allgemeine Ortsbestimmung Bezug nimmt:

> Thus, instead of absolute places and motions we use relative ones, which is not inappropriate in ordinary human affairs, although in philosophy abstraction from the senses is required. For it is possible that there is no body truly at rest to which places and motions may be referred.[7]

Erst mithilfe einer Analyse der wirkenden Kräfte, so Newton, wurde es möglich, die wahren Bewegungen der Körper zu bestimmen.[8]

Mit diesen Festlegungen verbunden waren für Newton Eigenschaften des absoluten Raumes und der absoluten Zeit, die auch ihre mathematische Form bestimmten. Zentrale Eigenschaft war die bereits zitierte Gleichförmigkeit oder Homogenität von Zeit und Raum: die Eigenschaften des Raumes sind an jedem Raumpunkt, die der Zeit zu jedem Zeitpunkt gleichartig. Diese Vorstellung wurde freilich erst durch die mathematische Fassung der geforderten Eigenschaften genauer erläutert. Newtons Werk ging davon aus, dass zu diesem

[4] [Newton 1999], S. 54.
[5] Vgl. [Rynasiewicz 2014] sowie die folgenden Abschnitte.
[6] Vgl. [Newton 1999], S. 54.
[7] Ebd., S. 57.
[8] Ebd., S. 58.

Zweck die in der Tradition Euklids stehende Geometrie herangezogen werden konnte: Die Zeit besitzt die mathematischen Eigenschaften einer geraden Linie, der Raum all jene, die ihm in der Geometrie Euklids zukommen. Beide, Zeit und Raum, konnten also durch die Mittel der traditionellen, wo nötig durch infinitesimale Methoden erweiterten Geometrie mathematisch gefasst werden, und in der Tat bestand eine zentrale Leistung des Newtonschen Hauptwerks in einer konsequenten Geometrisierung von Zeit, Raum und Bewegung materieller Körper. Implizit in dieser Geometrisierung war die Übernahme der traditionellen Vorstellung der Eindimensionalität der Zeit und der Dreidimensionalität des Raumes. Diese Konzepte waren freilich seit den antiken Versuchen ihrer Bestimmung (deren Spuren sich u.a. in den Definitionen des ersten Buches von Euklids *Elementen* fanden) nicht wesentlich weiter präzisiert worden.

Waren auf diese Weise in Newtons Werk für die mathematische Analyse von Zeit und Raum die Weichen gestellt, so rückte damit auch die Frage nach dem Status der Geometrie als Wissenschaft in den Vordergrund. Nach Abfassung der *Principia* entstandene Manuskripte Newtons zur Geometrie – er verfolgte zeitweise den schließlich doch nicht realisierten Plan eines eigenen Werkes mit dem Titel *Geometria*[9] – zeigen, dass er in philosophischer Hinsicht die Mechanik als Grundlage der Geometrie betrachtete, deren innerer Aufbau den Möglichkeiten bestimmter mechanischer Instrumente wie Zirkel und Lineal folgte. Dass daraus eine gewisse Zirkularität resultierte (die Grundbegriffe der Mechanik – Zeit, Raum, Bewegung – wurden geometrisch gefasst, die Grundbegriffe der Geometrie wiederum waren mechanisch zu verstehen) war in Newtons Augen vermutlich keine fatale Zirkularität, sondern ein Verhältnis gegenseitiger Erläuterung. Beide, Mechanik und Geometrie, waren für ihn in vergleichbarer Weise mathematische Wissenschaften, in deren Rahmen die alltägliche, von den Sinnen ausgehende Betrachtung von Zeit, Raum und Bewegung in Richtung auf ein tieferes Verständnis der Ordnung der Natur überschritten werden konnte.

2.1.2 Die „Realitätsklasse“ von Zeit und Raum

Obwohl Newton die verschiedenen (ontologischen, mathematischen und epistemologischen) Aspekte von Zeit und Raum explizit ansprach und voneinander trennte, waren zumindest die ontologischen und mathematischen bei näherem Hinsehen doch miteinander verschmolzen. In seinem hier erstmals edierten Manuskript „Der Formalismus“ sollte Hausdorff eine derartige Verschmelzung kritisieren, da sie die mathematische Analyse von philosophischen Klärungen abhängig machte, die vielleicht nie endgültig erreicht werden können:

> Wenn die Geometrie vom realen Raume spricht, so muss sie darauf warten, welcher Realitätsklasse der Raum von der Philosophie zugewiesen wird, oder aus eigener Machtvollkommenheit eine vielleicht falsche Ansicht darüber bilden. Ist der Raum ein Ding oder eine Ordnung der Dinge?

[9] Die zugehörigen Manuskripte sind gedruckt und kommentiert in [Newton 2008] und online verfügbar auf *www.newtonproject.ox.ac.uk*. Vgl. zur Interpretation auch [Guicciardini 2009], Kap. 13 und 14.

> eine Realität ausserhalb des Bewusstseins, oder nur im Bewusstsein, oder Beides? eine Thatsache der Erfahrung oder ein Gesetz vor aller Erfahrung? eine Gewohnheit oder eine Nothwendigkeit? eine Anschauung, ein Begriff, oder vielleicht nur ein Wort?[10]

Alle hier gestellten Fragen verweisen auf seit der Entfaltung der neuzeitlichen Mechanik in mehreren Schüben geführte Debatten, an denen sich mathematische Wissenschaftler ebenso wie Philosophen beteiligten. Die zuerst gestellte Frage, ob der Raum ein „Ding“ oder eine „Ordnung der Dinge“ sei, spielt auf die zwischen dem Newtonianer Samuel Clarke und Gottfried Wilhelm Leibniz in einer Serie von Briefen geführte Debatte über Newtons Verständnis des Raumes.

Die Kontroverse, die vor dem Hintergrund des 1714 erfolgten Wechsels im englischen Königshaus zu König George I. aus dem Haus Hannover gesehen werden muss, begann mit einem Brief von Leibniz an die Schwiegertochter seines früheren Patrons George I., Prinzessin Caroline von Ansbach, in welchem er – neben anderen theologischen Überzeugungen Newtons – dessen Ansicht kritisierte,

> que l'Espace est *l'Organe*, dont Dieu se sert pour sentir les choses.[11]

Newton hatte in der Tat im dritten Band der 1706 gedruckten *Optice*, einer erweiterten und von Clarke übersetzten lateinischen Fassung seiner *Opticks*, den unendlichen Raum mit dem zeitgenössisch *sensorium* genannten, vermuteten Organ der Wahrnehmung von Tieren verglichen. Im vorliegenden Kontext sind vor allem die von Leibniz klar gekennzeichneten ontologischen Implikationen des Newtonschen Vergleiches wichtig. War der unendliche Raum einem Organ Gottes vergleichbar, so lag darin insbesondere die Annahme seiner wirklichen Existenz. Dieser Annahme stellte Leibniz im dritten Schreiben an Clarke sein an Descartes anschließendes Raumverständnis gegenüber:

> Pour moy, j'ay marqué plus d'une fois, que je tenois *l'Espace* pour quelque chose de purement relatif, comme *le Temps*; pour un *Ordre des Coexistences*, comme *le Temps* est un *Ordre des Successions*. Car *l'Espace* marque en termes de possibilité, *un Ordre* des choses qui existent en même temps, en tant qu'elles existent *ensemble*; sans entrer dans leurs manières d'exister. Et lors qu'on voit plusieurs choses *ensemble*, on s'apperçoit de *cet Ordre des choses entre elles*.[12]

Leibniz verstand so den Raum als eine Relation zwischen zugleich existierenden Dingen, die Zeit als eine Relation zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen. Raum- und Zeitpunkte waren daher ebenso wie die Gesamtheiten Raum und Zeit im ontologischen Sinne für ihn keine eigenständigen Substanzen.

[10] NL Hausdorff, Fasz. 1067, Blatt 1.

[11] Der Briefwechsel wurde zuerst gedruckt in [Clarke 1717], hier S. 2, Hervorhebung im Original; Clarkes englische Übersetzung findet sich auf S. 3. Eine historische Einordnung des Briefwechsels bietet [Meli 2002]; eine ausführliche Analyse (aus einer Leibniz verpflichteten Perspektive) gibt [Vailati 1997].

[12] [Clarke 1717], S. 56, Hervorhebungen im Original; engl. Übersetzung S. 57.

Newton und seine Anhänger sahen, wie im vorigen Abschnitt dargestellt, die Analyse der sinnlich wahrgenommenen Erscheinungen als einen Beitrag zur Einsicht in die absoluten, vom Menschen unabhängigen natürlichen Zusammenhänge und deren Ursachen an. Aus diesem Grund hielt Newton, wie Leibniz treffend feststellte, an einem substantiellen Verständnis des Raumes, der Zeit und der Bewegung fest. Es war eng mit Newtons theologischer Überzeugung verbunden, dass Gott, welcher der Welt ihre Gestalt gegeben hatte, auch Urheber und Beherrscher des Raumes war, in welchem sich das physische Geschehen ereignete, das von Gott im Raume wahrgenommen wurde. Der metaphorische Vergleich des Raumes mit einem „Organ“ widersprach nicht nur der relationalen Auffassung von Leibniz, sondern er war in seinen Augen auch theologisch fragwürdig, da Gott hiermit unterstellt wurde, in seiner Auffassung der von ihm geschaffenen Welt gleichsam von Sinneswerkzeugen abhängig zu sein. Dies provozierte Leibniz im Lauf des Briefwechsels zu immer heftigeren Angriffen auf die von Clarke vertretenen Positionen, die tiefer und tiefer in theologisches Gebiet führten und zweifellos zum Ziel hatten, Newton in den Augen der Empfängerin der Briefe zu diskreditieren.

Eines der zwischen den Kontrahenten verhandelten Argumente hatte eine Form, die in den späteren Debatten immer wieder aufgegriffen und, wie wir noch sehen werden, auch von Hausdorff genutzt werden sollte, nämlich die Annahme eines (hier: göttlichen) Eingriffs in die räumliche Anordnung der Welt, der für das menschliche Bewusstsein unwahrnehmbar blieb. Konnte, so fragte Clarke, Gott die gesamte physische Welt im Raum um eine bestimmte Distanz verschieben, wenn er dies wollte? Für Clarke war das Bestehen dieser Möglichkeit ein Erfordernis des freien Willens und der unbegrenzten Macht des göttlichen Urhebers; zugleich musste eine solche Verschiebung für die – stets nur relative – Wahrnehmungsfähigkeit des Menschen unmerklich bleiben. Für Leibniz hingegen war die Annahme einer solchen Möglichkeit selbst sowohl philosophisch (aufgrund seines relationalen Raumverständnisses) als auch theologisch sinnlos (da Gott keine folgenlosen Handlungen unterstellt werden durften).

Entkleidet man diese Streitfrage ihrer theologischen Einbettung, so erhält man den Typ eines Argumentes, das sich vielfach durch die Debatten des 19. Jahrhunderts zog, und auf das auch Hausdorff ausgiebig zurückgreifen sollte: Welche Konsequenzen für Raum und Zeit ließen sich aus der Fiktion einer für die Sinne unbemerkbaren Veränderung der räumlichen und/oder zeitlichen Ordnung der physischen Welt ziehen?

Die zeitgenössisch weithin sichtbare Kontroverse über die Relativität und Realität des Raumes, die im Briefwechsel zwischen Leibniz und Clarke ausgetragen wurde, durchzog in ähnlicher Form auch die Schriften anderer Autoren des 18. Jahrhunderts. Zu der von Denis Diderot und Jean D'Alembert herausgegebenen französischen *Encyclopédie* trug Johann Heinrich Samuel Formey einen umfangreichen Beitrag „Espace“ bei, dem viele weitere Hinweise auf die Rezeption und Fortführung der Debatte bis in die Zeit um 1750 zu entnehmen sind. Der Herausgeber D'Alembert selbst weigerte sich in einem Zusatz zu

Formeys Artikel freilich, Partei zu ergreifen; ähnlich wie später Hausdorff hielt auch er diese „question obscure“ für „inutile à la Géométrie & à la Physique“.[13]

Zur Befestigung des wissenschaftlichen Raum- und Zeitverständnisses im 18. Jahrhundert trugen maßgeblich die Erfolge der Astronomie und Mechanik, und namentlich der an Newton anschließenden Himmelsmechanik, bei. Während die hier umrissenen metaphysischen und erkenntnistheoretischen Debatten vorerst nicht aufgelöst werden konnten, so herrschte doch auf allen Seiten weitgehende Einigkeit darüber, dass die mathematische Beschreibung des Raumes durch die traditionelle Geometrie des dreidimensionalen Raumes und die der Zeit durch ein eindimensionales Größenkontinuum zu erfolgen hatte. Freilich bargen auch diese Überzeugungen Unklarheiten, insbesondere hinsichtlich der von allen Seiten erwünschten und aktiv betriebenen Erweiterung der Geometrie und Größenlehre durch infinitesimale Methoden.

2.1.3 Zur Wahrnehmung von Zeit und Raum

Aus einer anderen, für Hausdorff ebenfalls wichtigen Perspektive näherte sich der Theologe und Philosoph George Berkeley diesen Fragen. Für ihn, der sowohl Newton als auch Leibniz kritisch gegenüberstand, rückte vor allem die Frage, wie das erlebende menschliche Bewusstsein räumliche und zeitliche Verhältnisse wahrnehmen und erfahren konnte, in den Mittelpunkt einer kritischen Analyse von Raum und Zeit. In seinem 1709 gedruckten Werk *An Essay Towards a New Theory of Vision* stellte er die Frage, welche geometrischen Konzepte dem von Menschen tatsächlich gesehenen Raum angemessen seien.

In mehreren Hinsichten kritisierte er dabei die auf die griechische Antike zurückgehende Tradition, die Geometrie Euklids als Grundlage der Optik zu verstehen. Diese Verknüpfung beruhte für ihn auf einer Abstraktion von dem konkreten Vorgang des Sehens und war daher fragwürdig. Insbesondere führte Berkeley die Idee eines *minimum visibile* in seine Theorie ein, d.h. einer kleinsten mit den Augen wahrnehmbaren räumlichen Ausdehnung. Ganz entsprechend gab es auch für jeden anderen Sinn ein *minimum perceptibile*:

> It has been shown there are two sorts of Objects apprehended by Sight; each whereof hath its distinct Magnitude, or Extension. The one, properly Tangible, i.e. to be perceived and measur'd by Touch, and not immediately falling under the Sense of Seeing. The other, properly and immediately Visible, by Mediation of which the former is brought in View. Each of these Magnitudes are greater or lesser, according as they contain in them more or fewer Points, they being made up of Points or *Minimums*. For, whatever may be said of Extension in *Abstract*, it is certain sensible Extension is not infinitely Divisible. There is a *Minimum Tangibile* and a *Minimum Visibile* beyond which Sense cannot perceive. This every ones Experience will inform him.[14]

[13] [Formey/D'Alembert 1751], S. 956.
[14] [Berkeley 1709], LIV.

Vor diesem Hintergrund war die (in der Regel implizit bleibende) Annahme der Euklidischen Tradition, dass jede ausgedehnte räumliche Figur unendlich teilbar war, für Berkeley eine prinzipiell nicht zu rechtfertigende Abstraktion. Anstelle der Geometrie Euklids musste daher der Optik – verstanden als eine Wissenschaft des konkreten Sehens – eine andere, auf dem *minimum visibile* beruhende Raumlehre zugrundegelegt werden, eine „Sehgeometrie“. Ganz entsprechend konnten auf anderen Sinnen beruhende Raumlehren konzipiert werden, namentlich eine Geometrie des Tastens.

Auch hinsichtlich der Zeit betonte Berkeley seine Distanz zu der von Newton fixierten Vorstellung einer gleichmäßig verstreichenden absoluten Zeit. Lediglich die Folge der konkrete Inhalte unseres Bewusstseins bilde die Grundlage der Vorstellung der Zeit:

> For my own part, whenever I attempt to form a simple Idea of Time, abstracted from the succession of Ideas in my Mind, which flows uniformly and is participated by all Beings, I am lost and embrangled in inextricable Difficulties. I have no Notion of it at all. [...] Time [is] therefore being nothing, abstracted from the Succession of Ideas in our Minds; it follows that the Duration of any Finite Spirit must be estimated by the Number of Ideas or Actions succeeding each other, in that Spirit or Mind.[15]

Auch wenn Berkeley seine Überlegungen nicht auf ausführliche empirische Untersuchungen des Zeitbewusstseins, des Sehens oder anderer Sinneswahrnehmungen stützte, begründeten seine Ausführungen doch eine wahrnehmungstheoretische Relativierung des Denkens über den Raum, auf die in der Folgezeit immer wieder zurückgegriffen wurde, zunächst vor allem im englischsprachigen Raum, ab dem 19. Jahrhundert dann auch darüber hinaus. Ein Autor, der schon früh diese Argumentationslinie weiterverfolgte, auch wenn er in anderen philosophischen Grundfragen entschieden von Berkeley abwich, war der schottische Philosoph Thomas Reid. In seiner zuerst 1764 erschienenen Schrift *An Inquiry Into the Human Mind on the Principles of Common Sense* diskutierte er ausführlich, welche räumlichen Vorstellungen die menschliche Erkenntnis mit den Sinneswahrnehmungen verband. Eine bemerkenswerte Überlegung Reids war dabei, dass mit jedem Sinn eine *eigene*, mathematisch unterschiedliche Form der Geometrie verbunden war. So skizzierte er neben der Euklidischen Geometrie insbesondere eine „geometry of visibles“, welche die zentralperspektivischen Eindrücke eines einzelnen Auges umfasste und, wie er ausführte, die Geometrie einer zweidimensionalen Sphäre war, deren Großkreise den gesehenen Geraden entsprachen. Ihre Prinzipien, so Reid, seien „not less true nor less evident as Euclid's propositions, with regard to tangible figures“.[16] Anders als in der (Euklidischen) Geometrie, die als Raumlehre für „tangible figures“ zu verstehen war, galten in der „geometry of visibles“ Sätze wie die folgenden, die zu den entsprechenden Sätzen der Geometrie Euklids in Widerspruch standen:

[15] [Berkeley 1710], § 98.

[16] Ich folge der zweiten Ausgabe [Reid 1765], Chap. 6, Section 9. Zu Reids Ansatz existiert inzwischen eine umfangreiche Literatur, vgl. z.B. [Nichols 2007].

> 5. Any two right lines being produced, will meet in two points, and mutually bisect each other.
> 6. If two lines be parallel, that is, every where equally distant from each other, they cannot both be straight.
> [...]
> 10. Of every right-lined triangle, the three angles taken together, are greater than two right angles.[17]

Reid ließ in seinem Text einen „rosenkreuzlerischen Philosophen“ Johannes Rudolphus Anepigraphus auftreten, der auf seinen Reisen einer Art von Wesen begegnet sei, welche lediglich mit einem Sehsinn ausgestattet gewesen seien und daher zwar dieselbe Arithmetik wie die „unsrige“, aber eben nur jene (zweidimensionale, sphärische) „geometry of visibles“ entwickelt hätten.[18]

Anders als Berkeley zielte Reid nicht auf eine immaterialistische Infragestellung der durch die Sinne vermittelten äußeren Welt. Ganz im Gegenteil war er davon überzeugt, dass die Sinne dem menschlichen Bewusstsein „Zeichen“ lieferten, die auf die gewöhnliche, vom „common sense“ zu Recht unterstellte Existenz äußerer Dinge mit bestimmten Eigenschaften schließen ließen. Dennoch übernahm und vertiefte er die in Berkeleys Kritik vorbereitete Relativierung des Zusammenhangs zwischen sinnlichen Wahrnehmungen und geometrischen Vorstellungen. Im weiteren Verlauf seines Kapitels über den Sehsinn sprach er schließlich auch die optischen Möglichkeiten anderer Lebewesen an:

> It is the intention of nature, in giving eyes to animals, that they may perceive the situation of visible objects, or the direction in which they are placed: it is probable, therefore, that, in ordinary cases, every animal, whether it has many eyes or few, whether of one structure or of another, sees objects single, and in their true and proper direction. And since there is a prodigious variety in the structure, the motions, and the number of eyes in different animals and insects, it is probable that the laws by which vision is regulated, are not the same in all, but various, adapted to the eyes which nature hath given them.[19]

Die hier angedeutete Verknüpfung der unterschiedlichen optischen Wahrnehmung verschiedener Spezies und die damit verbundene Notwendigkeit, auch die (geometrischen) Gesetze des Sehens von Spezies zu Spezies verschieden zu entwickeln, wurde in der Tradition der physiologischen Optik im 19. Jahrhundert aufgegriffen und auch erkenntnistheoretisch weiter entfaltet. Auch die Übertragung auf ein analoges Verständnis der Zeit – als gegründet auf den Tatsachen des Zeiterlebens und der Zeitwahrnehmung – gewann im 19. Jahrhundert viele Anhänger, wie wir in Abschnitt 2.3.1 sehen werden.

[17] Ebd., S. 172.
[18] Ebd., S. 178-185.
[19] [Reid 1765], Chap. 9, Section 14, S. 233.

2.2 Kants Auffassung von Zeit und Raum im Kontext des späten achtzehnten Jahrhunderts

Im deutschsprachigen Raum, aber auch darüber hinaus, waren während eines großen Teils des 19. Jahrhunderts die Ausführungen Immanuel Kants ein fester und wiederkehrender Bezugspunkt für Diskussionen über Zeit und Raum. Das gilt auch für Hausdorff. In seiner Vorlesung *Zeit und Raum* gab er eine knappe Charakterisierung der von Kant vertretenen Position. Dabei zitierte er dessen Erläuterung der Zeit als einer „subjectiven Bedingung unserer (menschlichen) Anschauung“, der „an sich, außer dem Subjecte, nichts“ entspricht; zugleich gab er Kants Auffassung wieder, nach welcher die Zeit „eine nothwendige Vorstellung [ist], die allen Anschauungen zu Grunde liegt. Auf diese Nothwendigkeit a priori gründet sich auch die Möglichkeit apodiktischer Grundsätze von den Verhältnissen der Zeit, oder Axiomen der Zeit überhaupt.“ Die Arithmetik (der reellen Größen) bringe wiederum eine quantitative Bestimmung der Zeit zustande.[20] „Also“, so fasste Hausdorff seine Darstellung zusammen:

> Zwei fundamentale Thesen:
>
> I. Raum und Zeit sind reine Anschauungsformen, nicht aus der Erfahrung gezogen sondern Bedingungen möglicher Erfahrung, darauf beruht die apriorische Gewissheit der Mathematik, die weder formal-logischer noch empirischer Natur ist.
>
> II. Raum und Zeit kommen nur den Erscheinungen (Gegenständen der Erfahrung), nicht den Dingen an sich (unabhängig vom erkennenden Subjecte) zu.[21]

Und er kommentierte: „Beide [...] haben zahlreichen Widerspruch gefunden. [...] Wir halten I für falsch, II für richtig, wiewohl von Kant nicht bewiesen.“[22]

Hausdorff hob hier mehrere Aspekte der Kantischen Position hervor, die im Lauf des 19. Jahrhunderts in verschiedene Richtungen weiter entfaltet und diskutiert wurden. Zunächst sei jedoch auf die Stellung dieser Aspekte in Kants Erkenntniskritik und ihrem zeitgenössischen Kontext selbst etwas näher eingegangen, um in späteren Abschnitten dann auch Hausdorffs Anschluss und Kritik an Kants Überlegungen genauer zu charakterisieren.

2.2.1 Zeit und Raum als Anschauungsformen a priori und die Pluralität der Welten

In seiner 1781 gedruckten *Critik der reinen Vernunft* suchte Kant im Zuge seines Versuches, die „Bedingungen möglicher Erfahrung“ zu bestimmen, auch

[20] Die beiden von Hausdorff zitierten Passagen finden sich in KrV, A 35 und A 31; vgl. *Zeit und Raum*, Blatt 54 f.

[21] *Zeit und Raum*, Blatt 55.

[22] Ebd.

eine Konzeption von Raum und Zeit zu entfalten, welche die in den vorigen Abschnitten angedeuteten Kontroversen des 17. und 18. Jahrhunderts hinter sich ließ. Unter dem Titel einer „transzendentalen Ästhetik“ beschrieb er beide Kategorien als dem Menschen a priori gegebene Formen einer „reinen“, d.h. unabhängig von konkreter sinnlicher Wahrnehmung gewonnenen Anschauung; Raum war dabei die Form der äußeren, Zeit die Form der inneren Anschauung. Demnach waren Raum und Zeit weder absolute Gegebenheiten in der gegenständlichen Welt – einer Welt „an sich“, die nach Kants Überzeugung für das menschliche Gemüt schlechterdings unzugänglich und allenfalls für einen göttlichen Intellekt fassbar war – noch auch ein reines Relationengefüge zwischen Körpern und Ereignissen, wie Leibniz es vor Augen gehabt hatte. Vielmehr waren sie geknüpft an die kognitiven Voraussetzungen dessen, was Kant das „Gemüt“ nannte, d.h. den Inbegriff der grundlegenden menschlichen Erkenntnisvermögen der Sinnlichkeit und des Verstandes:

> Auf welche Art und durch welche Mittel sich auch immer eine Erkenntnis auf Gegenstände beziehen mag, so ist doch diejenige, wodurch sie sich auf dieselbe unmittelbar bezieht, und worauf alles Denken als Mittel abzweckt, die Anschauung. Diese findet aber nur statt, so fern uns der Gegenstand gegeben wird; dieses aber ist wiederum nur dadurch möglich, daß er das Gemüth auf gewisse Weise afficire. Die Fähigkeit (Receptivität), Vorstellungen durch die Art, wie wir von Gegenständen afficirt werden, zu bekommen, heißt Sinnlichkeit. Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben, und sie allein liefert uns Anschauungen, durch den Verstand aber werden sie gedacht, und von ihm entspringen Begriffe.[23]

In einer *empirischen* Anschauung wirkte für Kant ein Gegenstand durch Empfindung auf die Vorstellungsfähigkeit und gab dieser so eine Materie, einen Inhalt. Die Form der Anschauungen hingegen, so argumentierte er, musste „insgesamt im Gemüte a priori bereit liegen“ und konnte daher „abgesondert von aller Empfindung“ betrachtet werden.[24] Der Raum, so führte er aus, war die Form des „äußeren Sinnes“, die Zeit hingegen die „Form des innern Sinnes, d.i. des Anschauuens unserer selbst und unsers innern Zustandes“.[25]

Über die Frage, was nach Kants Auffassung über diese a priori im Gemüt bereitliegenden Formen der sinnlichen Anschauung genau ausgesagt werden kann, wurde und wird eine lange Debatte geführt. Für Hausdorff wichtig wurden dabei vor allem zwei Aspekte: Erstens eine den Überlegungen Kants innewohnende spezifische Relativierung von Raum und Zeit, die sich von jener unterschied, die Gegenstand der Debatte zwischen Leibniz und den Newtonianern gewesen war, und zweitens die darauf beruhende, von Kant vorgeschlagene Bestimmung der Erkenntnisgrundlagen der Mathematik, namentlich der Geometrie und der Arithmetik.

[23]KrV, A 19. Der Text eröffnet den Abschnitt „Die transzendentale Aesthetik“.
[24]KrV, A 20.
[25]KrV, A 23, A 33.

In der zweiten Auflage seines Werkes machte Kant die Relativierung der Anschauungsformen Raum und Zeit auf das *menschliche* Gemüt durch eine entsprechende Einfügung in dem oben zitierten Beginn der „transcendentalen Aesthetik“ explizit: „uns Menschen wenigstens“, so schrieb er nun, wird ein Gegenstand nur durch die Affektion des Gemütes, die wir Sinnlichkeit nennen, gegeben.[26] Schon in der ersten Auflage hatte er dies in seinen „Allgemeinen Anmerkungen zur transcendentalen Aesthetik“ klar ausgesprochen:

> Was es vor eine Bewandniß mit den Gegenständen an sich und abgesondert von aller dieser Receptivität unserer Sinnlichkeit haben möge, bleibt uns gänzlich unbekannt. Wir kennen nichts, als unsere Art, sie wahrzunehmen, die uns eigenthümlich ist, die auch nicht nothwendig jedem Wesen, ob zwar jedem Menschen zukommen muß. Mit dieser haben wir es lediglich zu thun. Raum und Zeit sind die reine Formen derselben, Empfindung überhaupt die Materie.[27]

Freilich hatte Kant zumindest zeitweise auch die Erkenntnisvermögen anderer ähnlich aufgebauter, ebenfalls über einen sprachlich verfassten Verstand und eine sinnliche Anschauung verfügende Wesen vor Augen. Solche Wesen hatte er bereits in seiner 1755 erschienenen kosmologischen Schrift *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* diskutiert, wo er die Möglichkeit intelligenter Bewohner anderer kosmischer Welten, und namentlich der bekannten Planeten des Sonnensystems, ausführlich beschrieben hatte.

Die in dieser Schrift angedeutete „Pluralität der Welten“ nahm das Motiv einer langen Reihe von Beiträgen zur kosmologischen Literatur des 17. und 18. Jahrhunderts auf. Eines der für diese Literatur grundlegenden Werke war die 1686 erschienene Schrift *Entretriens sur la pluralité des mondes* von Bernard Le Bovier de Fontenelle, einem der Hauptvertreter der „Modernen“ in der sog. *querelle des Anciens et des Modernes* der französischen Literatur, der 1699 zum ständigen Sekretär der Pariser *Académie des sciences* ernannt wurde. Der Titel von Fontenelles Schrift wurde bald sprichwörtlich und auch Hausdorff verwendete ihn wiederholt. In ihr zeichnete Fontenelle das Bild eines kopernikanisch aufgefassten Sonnensystems, dessen Planeten von intelligenten Lebewesen bewohnt wurden. In offener Anspielung auf die Unterschiede der Bewohner verschiedener Erdteile verglich er die Bewohner der sonnennahen Planeten mit dem Äquator näher lebenden Völkern, jene der sonnenfernen Planeten Jupiter und Saturn mit den Nordeuropäern, und schließlich die Menschen selbst mit den Einwohnern Frankreichs. Fontenelles Gleichnis betonte unter anderem auch ein epistemologisches Thema: Wie nahmen solcherart unterschiedliche Bewohner des Kosmos diesen in ihrer jeweils eigenen Perspektive wahr? Die Antwort auf diese Frage hatte zwei Seiten: Zum einen ergab sich aus der verschiedenen räumlichen Position eine jeweils unterschiedliche Perspektive auf den Kosmos.

[26] KrV, B 33.
[27] KrV, A 42.

Zum anderen mochte durch die unterschiedliche Natur der Weltenbewohner auch deren jeweiliges Wahrnehmungs- und Erkenntnisvermögen spezifische Unterschiede aufweisen.[28]

Das Motiv kehrte in der kosmologischen Literatur des 18. Jahrhunderts an vielen Stellen wieder. So entfaltete etwa Christiaan Huygens in seiner posthum erschienenen Schrift *Cosmotheoros* ein starkes, auf ausdrücklich als solchen gerechtfertigten Analogieschlüssen beruhendes Argument zugunsten gemeinsamer Grundstrukturen intelligenter Bewohner der verschiedenen Planeten (oder kosmischen Welten), das ihn bis zur These einer ähnlichen körperlichen Ausstattung mit Gliedmaßen und Sinnen führte, ebenso wie er auch die Tier- und Planzenwelt sowie die planetarischen Verhältnisse für ähnlich hielt. Huygens rechtfertigte seine Analogieschlüsse ähnlich wie andere Autoren vor ihm dabei nicht als sicheres Wissen, sondern als wahrscheinliche Erkenntnis – eine Erkenntnisform, die dem Menschen nicht nur gestattet, sondern in vielen Fällen auch einzig möglich sei.[29] Neben den funktionalen Analogien leitete Huygens dabei auch – anders als etwa Fontenelle, dessen Ausführungen kaum religiöse Bezüge enthielten – ein theologisches Motiv: Er war überzeugt, dass Gottes Schöpfung intelligente Betrachter einschloss, welche die Schönheit und Vollkommenheit der kosmischen Ordnung wahrnehmen und erkennen konnten.

Die Motive der göttlichen Ordnung und der Möglichkeit einer wahrscheinlichen Erkenntnis derselben prägten dann auch die vor allem im England des 18. Jahrhunderts verbreitete physikotheologische Literatur, namentlich die einschlägigen Schriften des anglikanischen Priesters William Derham[30] und des Gelehrten Thomas Wright of Durham, an dessen 1750 in London gedrucktes Buch *An Original Theory or New Hypothesis of the Universe* Kant unmittelbar anknüpfte. In dieser christlichen Literatur wurde – meist in ausdrücklicher Entfaltung des bereits bei Newton anzutreffenden theologischen Motivs – Gott stets als Autor und Garant der kosmischen Ordnung beschrieben. Freilich gab es bereits zur selben Zeit, als Kant diese Literatur aufgriff, auch distanzierte Kommentare, die eher auf Fontenelles weltlicher Linie lagen. Zu ihnen zählte insbesondere eine satirische Erzählung Voltaires, die, wie wir noch sehen werden, zur Zeit von Hausdorffs Nachdenken über Zeit und Raum einige Resonanz erhalten sollte, die zuerst 1752 in Paris erschienene Erzählung *Micromégas*.

In seiner Erzählung entfaltete Voltaire ein ironisches Spiel mit den Möglichkeiten einer andersartigen Wahrnehmung der räumlichen, zeitlichen und kosmischen Ordnung der Dinge. So führte er etwa eine dramatische Variation der für Bewohner anderer Welten verfügbaren Sinne und Erkenntnisfähigkeiten vor Augen, und namentlich spielte er mit der unterschiedlichen Größe und Größenwahrnehmung solcher intelligenten Wesen. Hauptperson der Erzählung ist der

[28]Vgl. [Fontenelle 1686], S. 212 f.

[29]Vgl. [Huygens 1703]. Eine verwandte Rechtfertigung einer wahrscheinlichen Erkenntnis kosmischer Ähnlichkeiten fand sich in insbesondere in der Schrift *Discovery of a New World in the Moone* des anglikanischen Theologen und ersten Sekretärs der Royal Society of London John Wilkins, die 1638, also noch deutlich vor Fontenelles Schrift, erschienen war.

[30]Vgl. [Derham 1715].

Siriusbewohner Mikromegas, der „acht Meilen hoch“ war und „an die tausend Sinne“ besaß. Da er „die Gravitationsgesetze und alle anziehenden und abstoßenden Kräfte ganz ausgezeichnet“ kannte, konnte er „bald mit Hilfe eines Sonnenstrahles, bald mit der Annehmlichkeit eines Kometen mit seinen Begleitern von Weltkugel zu Weltkugel“ fahren und traf schließlich auf dem Saturn den „Sekretär der Akademie des Saturns“, eine Parodie auf Fontenelle, welcher wie alle Saturnianer lediglich noch 72 Sinne besaß und „nur sechstausend Fuß hoch“ war.[31] Gemeinsam reisten die beiden sodann auf die winzige Erde, wo sie nach einigen mikroskopischen Mühen und Mißverständnissen schließlich das gerade eben von Lappland nach Frankreich zurückkehrende Forschungsschiff von Pierre de Maupertuis entdeckten und mit dessen gelehrter Besatzung in eine galante Konversation über das Übel von Kriegen und die Unlösbarkeit des Problems der Seele traten.[32]

Wichtig an dem hier nur knapp angedeuteten Motivgeflecht zur Pluralität der Welten ist – wie schon in der Debatte zwischen Leibniz und Clarke – der enge Zusammenhang zwischen der Reflexion der Grundstrukturen von Zeit und Raum und den Möglichkeiten der Wahrnehmung zeitlicher und räumlicher Verhältnisse durch intelligente und sinnlich wahrnehmende Wesen. Damit verbunden war wiederum die mehr oder weniger freie und teils poetische Imagination von Raum- und Zeitwahrnehmungen, die von der des Menschen abwichen, sowie eine Reflexion über die Einrichtung des Kosmos, die sich zwischen dem festen Glauben an eine göttliche Ordnung und einer ironischen Relativierung desselben hin und her bewegte. Hausdorffs eigenes poetisches Spiel mit den Möglichkeiten alternativer Weltordnungen und -verläufe knüpft an die relativistische Seite dieser literarischen Tradition an, auch wenn sich nicht entscheiden lässt, wie viel er unmittelbar den Schriften des 17. und 18. Jahrhunderts verdankte.

Kants Anschluss an diese Tradition hingegen war offensichtlich. Seine *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* knüpfte direkt an Wrights Kosmologie an und suchte ihr eine mit Newtonianischen Motiven entwickelte Kosmogonie beizufügen. Danach war die jetzt sichtbare kosmische Ordnung Resultat einer sich unter Gravitationskräften bewegenden, zunächst chaotischen Urmaterie, die sich in kosmischen Wirbeln verdichtete und schließlich in vielen Sonnensystemen und „Milchstrassen“ ordnete. Kant nahm an,

> daß die Natur, nur einem unendlich kleinen Theile nach, ausgebildet sey, und unendliche Räume noch mit dem Chaos streiten, um in der Folge künftiger Zeiten ganze Heere von Welten und Weltordnungen, in aller gehörigen Ordnung und Schönheit, darzustellen.[33]

---

[31] Vgl. [Voltaire 1752], Übersetzungen M.E.

[32] Maupertuis hatte in den Jahren 1736-1737 eine Expedition von Paris nach Lappland geleitet, um dort die Länge eines Breitengrades zu vermessen. Zusammen mit der gleichzeitigen französischen Expedition in die Anden bestätigten diese geodätischen Vermessungen Newtons Vorhersage der Abplattung der Erde an den Polen.

[33] [Kant 1755], S. 115 f.

Dabei stimmte Kant freilich Wright zu, dass diese Ordnung sich im Großen zu einer wesentlich stärker geordneten Welt zusammenfügte bzw. künftig zusammenfügen würde, als wir heute glauben.[34]

Das Motiv der Pluralität der Welten und ihrer möglichen intelligenten Bewohner bildet auch den Hintergrund für die transzendentale Ästhetik seiner kritischen Periode.[35] Kant schlug sich dabei – Huygens verwandt – wieder auf die physikotheologisch motivierte Seite der Annahme einer einheitlichen, in der Natur intelligenter Lebewesen verankerten Grundstruktur der Raum- und Zeitwahrnehmung. In der *Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels* hatte Kant noch die „wahrscheinliche Vermutung“ vorgeschlagen, dass die wie beim Menschen auf Sinnlichkeit und Verstand beruhenden Erkenntnisvermögen „denkender Naturen [...], nach dem Verhältnis des Abstandes ihrer Wohnplätze von der Sonne, immer trefflicher und vollkommener werden“.[36] In der *Kritik der reinen Vernunft* hingegen war es vor allem die Annahme einer einheitlichen und festen Struktur des erkennenden menschlichen Gemütes, auf der seine Vorschläge für ein Verständnis von Raum und Zeit letztlich gründeten.

2.2.2 Die transzendentale Idealität von Zeit und Raum und die Grundlagen der Mathematik

Damit verbunden war bei Kant auch eine spezifische Philosophie der Mathematik, insbesondere der Geometrie und der Arithmetik, welche in die neukantianische Tradition übernommen und von Hausdorff wiederum heftig kritisiert werden sollte. Da der „Raum [...] eine notwendige Vorstellung, a priori, die allen äußeren Anschauungen zum Grunde liegt“ war und – noch grundlegender – die „Zeit [...] eine notwendige Vorstellung, die allen Anschauungen zum Grunde liegt“[37], folgerte Kant, dass beide zugleich Quellen erfahrungsunabhängiger Erkenntnis waren:

> Zeit und Raum sind demnach zwei Erkenntnisquellen, aus denen a priori verschiedene synthetische Erkenntnisse geschöpft werden können, wie vornehmlich die reine Mathematik in Ansehung der Erkenntnisse vom Raume und dessen Verhältnissen ein glänzendes Beispiel gibt.[38]

Für die Geometrie bedeutete dies insbesondere, dass ihre grundlegenden Wahrheiten vor aller Erfahrung aus der reinen Anschauung gezogen werden konnten:

[34] Dieser letzte Punkt und der direkte Anschluss an Wright wird in vielen Darstellungen des Beitrags von Kant zur manchmal so genannten Kant-Laplaceschen Nebularhypothese übersehen, die sich namentlich im 19. Jahrhundert in der deutschen philosophischen Literatur verbreiteten. Vgl. [Kant 1755], S. XXXVI und öfter.

[35] Diesen Zusammenhang hat bereits Hans Blumenberg in mehreren Schriften betont.

[36] [Kant 1755], S. 186 f. Der von Kant angeführte Grund für die größeren Erkenntnisfähigkeiten sonnenferner intelligenter Lebewesen war die geringere Schwere ihrer Körpermaterie und die daraus vermeintlich resultierende geringere Trägheit ihrer Sinne und Gedanken.

[37] KrV, A 24 und A 31.

[38] KrV, A 38 f.

> So werden auch alle geometrischen Grundsätze, z.E. dass in einem Triangel zwei Seiten zusammen größer seien, als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung und zwar a priori mit apodiktischer Gewissheit abgeleitet.[39]

Für die Arithmetik wiederum war die Anschauungsform der Zeit grundlegend. In seinen 1783 gedruckten *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können* erläuterte Kant: „Arithmetik bringt selbst ihre Zahlbegriffe durch sukzessive Hinzusetzung der Einheiten in der Zeit zu Stande."[40] Die *Kritik der reinen Vernunft* sprach hier sogar von „Axiomen der Zeit", die a priori aus der „notwendigen Vorstellung" der Zeit, „die allen Anschauungen zum Grunde liegt" gezogen werden konnten:

> Auf diese Notwendigkeit a priori gründet sich auch die Möglichkeit apodiktischer Grundsätze von den Verhältnissen der Zeit, oder Axiomen von der Zeit überhaupt. Sie hat nur eine Dimension: verschiedene Zeiten sind nicht zugleich, sondern nach einander (so wie verschiedene Räume nicht nach einander, sondern zugleich sind).[41]

Kant erläuterte diese Bemerkungen an mehreren Stellen seines Werkes weiter, nicht zuletzt durch weitere Beispiele aus der Geometrie. Die Mathematik kann, so Kants Grundgedanke, ihre *Gegenstände* – in der Geometrie also beispielsweise gerade Linien, Dreiecke, usw., in der Arithmetik die Zahlen – in reiner Anschauung „in concreto, und dennoch a priori darstellen, oder, wie man es nennt, sie konstruieren", wie er in den *Prolegomena* formulierte.[42] Eben weil sie dies kann, wird die Konstruktion in „reiner Anschauung" damit zur begründenden Instanz für mathematische Wahrheiten.

Kant hatte die Geometrie der euklidischen Tradition und die gewöhnliche Arithmetik oder „Größenlehre" seiner Zeit vor Augen, und er zweifelte nicht daran, dass sie die Grundlage der naturwissenschaftlichen Erfahrungserkenntnis von räumlichen Verhältnissen war. Ein großer Teil der an Kant anknüpfenden philosophischen Tradition des 19. Jahrhunderts hielt an dieser Überzeugung fest und glaubte, dass namentlich die euklidische Geometrie zu den a priori und notwendig gültigen Grundlagen der menschlichen Erkenntnis zählte. Diese Interpretationslinie geriet nach dem Aufkommen nichteuklidischer geometrischer Systeme[43] in große Schwierigkeiten und verwickelte sich in lange Debatten. Hausdorff hielt diese Linie einer ernsthaften Diskussion nicht mehr für würdig. In seiner Leipziger Antrittsvorlesung von 1903 formulierte er:

> die Mathematik darf jede aprioristische Konstruktion, die den euklidischen Raum mit seinen speziellen Eigentümlichkeiten, als Denknotwendigkeit, willkürfrei und voraussetzungslos zu deduzieren behauptet, ungeprüft ad acta legen.[44]

[39] KrV, A 25.
[40] *Prolegomena*, S. 53.
[41] KrV, A 31.
[42] *Prolegomena*, S. 50.
[43] Vgl. unten, Abschnitt 2.3.2.
[44] *Das Raumproblem*, S. 3.

Verteidiger der transzendentalen Ästhetik Kants haben seit dem Aufkommen der nichteuklidischen Geometrien andererseits auch immer wieder nach Wegen gesucht, Kants Ansichten mit dem Bestehen einer Pluralität möglicher axiomatischer Systeme der Geometrie vereinbar zu machen.[45] Ein möglicher Weg einer solchen Anpassung bestand darin zuzulassen, dass *alle* geometrischen Systeme in „reiner Anschauung“ konstruiert werden können. Der Preis, der dafür bezahlt werden musste, war freilich eine Lockerung des Zusammenhangs zwischen Geometrie und „reiner Anschauung“ einerseits und der empirischen Erkenntnis räumlicher Verhältnisse andererseits. Denn die Frage, *welches* der so konstruierten axiomatischen Systeme mit unseren räumlichen Erfahrungen zusammenpasst, konnte nun nicht mehr a priori entschieden werden, sondern war nur empirisch zu entscheiden. Wir werden noch sehen, wie diese Frage im Lauf des 19. Jahrhunderts wiederholt diskutiert wurde.

Ein anderer mehrfach beschrittener Weg war die Annahme, dass zwar die uns Menschen spezifische „reine Anschauung“ das Euklidische System lieferte, aber unterschiedliche „Intelligenzen“ verschiedene, mit anderen geometrischen Systemen verbundene Formen räumlicher Anschauung haben könnten. Interessanterweise entfaltete sich auf der Seite der Arithmetik nach dem Aufkommen neuer Zahlsysteme bzw. Größenbereiche ein vergleichbarer Diskurs nur in wesentlich engerem Rahmen.[46] Unabhängig von dieser Frage, zu der wir zurückkehren werden[47], bleibt festzuhalten, dass Kant fest davon überzeugt war, dass die reine Mathematik – d.h. insbesondere Geometrie und Arithmetik – a priori, vor aller Erfahrung, aus einer Selbsterkenntnis des menschlichen Gemüts geschöpft war. Insofern war die Struktur der von Kant angenommenen „reinen Anschauung“ auch Quelle und Begründungsinstanz der Inhalte geometrischer und arithmetischer Erkenntnis, und folglich bildete sie auch die Grundlage einer „apodiktischen“ mathematischen Beschreibung von Raum und Zeit. Wie wir bereits gesehen haben, sollte eben diese Annahme zum Gegenstand von Hausdorffs Kritik werden.

Auch für Kant stellte sich die Frage der „Realitätsklasse“ von Zeit und Raum. Vor dem skizzierten Hintergrund einer Verankerung beider Anschauungsformen im menschlichen „Gemüt“ fand er hierfür eine Formel, auf die auch Hausdorff wiederholt zurückgriff, die der „empirischen Realität“ und zugleich der „transzendentalen Idealität“ beider Anschauungsformen. Für den Raum argumentierte Kant in der ersten Auflage der *Kritik der reinen Vernunft* wie folgt:

> Wir können demnach nur aus dem Standpunkte eines Menschen vom Raum, von ausgedehnten Wesen etc. reden. Gehen wir von der subjektiven Bedingung ab, unter welcher wir allein äußere Anschauung bekommen können, so wie wir nämlich von den Gegenständen affiziert werden

[45] Für einen Überblick über die heute weiter geführten Debatten vgl. z.B. [Posy 1992] sowie insbesondere die Beiträge Michael Friedmans, u.a. [Friedman 1992] und [Friedman 2012].

[46] Hier ist vor allem auf die Konstruktion der Quaternionen durch Hamilton und die in [Hankel 1867] geführte mathematische und epistemologische Diskussion komplexer und hyperkomplexer Zahlsysteme zu verweisen; vgl. hierzu [Epple 1996].

[47] Vgl. Abschnitt 2.3.4 zu Liebmann; zur französischsprachigen Literatur Abschnitt 2.3.7.

> mögen, so bedeutet die Vorstellung vom Raume gar nichts. [...] Denn wir können von den Anschauungen anderer denkenden Wesen gar nicht urteilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien, welche unsere Anschauung einschränken und für uns allgemein gültig sind. [...] Unsere Erörterungen lehren demnach die Realität (d.i. objektive Gültigkeit) des Raumes in Ansehung alles dessen, was äußerlich als Gegenstand uns vorkommen kann, aber zugleich die Idealität des Raums in Ansehung der Dinge, wenn sie durch die Vernunft an sich selbst erwogen werden, d.i. ohne Rücksicht auf die Beschaffenheit unserer Sinnlichkeit zu nehmen.[48]

Für die Zeit galt entsprechendes:

> Die Zeit ist also lediglich eine subjektive Bedingung unserer (menschlichen) Anschauung (welche jederzeit sinnlich ist, d.i. so fern wir von Gegenständen affiziert werden), und an sich, außer dem Subjekte, nichts. Nichts desto weniger ist sie in Ansehung aller Erscheinungen, mithin auch aller Dinge, die uns in der Erfahrung vorkommen können, notwendiger Weise objektiv. [...] Unsere Behauptungen lehren demnach empirische Realität der Zeit, d.i. objektive Gültigkeit in Ansehung aller Gegenstände, die jemals unsern Sinnen gegeben werden mögen. [...] Dagegen bestreiten wir der Zeit allen Anspruch auf absolute Realität [...]. Solche Eigenschaften, die den Dingen an sich zukommen, können uns durch die Sinne auch niemals gegeben werden. Hierin besteht also die transzendentale Idealität der Zeit, nach welcher sie, wenn man von den subjektiven Bedingungen der sinnlichen Anschauung abstrahiert, gar nichts ist, und den Gegenständen an sich selbst (ohne ihr Verhältnis auf unsere Anschauungen) weder subsistierend noch inhärierend beigezählt werden kann.[49]

Dabei war die Zeit für Kant fundamentaler als der Raum, insofern sie als Form der Anschauung *aller* „Dinge, die uns in der Erfahrung vorkommen können“ bestimmt wurde, nicht nur jener, die als Gegenstand äußerer Anschauung gegeben waren.

Das von Kant häufig verwendete „uns“ verwies auf eine anthropologische Verankerung der Anschauungsformen Raum und Zeit. Beide waren für ihn weder ein „Sensorium Gottes“ noch auch eine reine Relation zwischen Gegenständen, „weder absolute, noch relative Bestimmungen“ von „Dingen an sich“.[50] Ihre Grundlage lag vielmehr in der sinnlichen Ausstattung des Menschen. Wie bereits dargestellt, hielt er diese Grundlage für gehaltvoll; sie erlaubte insbesondere den Aufbau der arithmetischen und geometrischen Kenntnisse der reinen Mathematik. Wie weiter unten noch ausgeführt wird, barg diese anthropologische Verankerung auch die Möglichkeit einer Kant überholenden Auffassung von Zeit und Raum, zum einen in Richtung auf einen bereits in der kosmologischen Literatur des 18. Jahrhunderts angelegten stärkeren Naturalismus, zum anderen in Richtung auf eine stärkere Relativierung von Zeit und Raum auf

[48]KrV, A 26-29.
[49]KrV, A 34-36.
[50]So KrV, A 26 über den Raum, entsprechend A 32 für die Zeit.

die Strukturen des erkennenden Bewusstseins. Mit beiden Möglichkeiten spielte Hausdorff in seinen Schriften auf radikale Weise.

2.2.3 Zeit, Raum und Bewegung: Mechanik bei Kant

Kant hielt nicht nur die „reine Mathematik“ für eine synthetische Erkenntnis a priori, für eine auf die „reine Anschauung“ in ihren Formen Zeit und Raum gegründete Wissenschaft. Er war auch davon überzeugt, dass es eine „reine Naturwissenschaft“ gebe, „die a priori und mit aller derjenigen Notwendigkeit, welche zu apodiktischen Sätzen erforderlich ist, Gesetze vorträgt, unter denen die Natur steht.“[51] Zu den so aufgestellten „Grundsätzen einer allgemeinen Physik“ zählte Kant insbesondere die Aussage, „dass die Substanz bleibt und beharrt, dass alles, was geschieht, jederzeit durch eine Ursache nach beständigen Gesetzen vorher bestimmt sei, u.s.w.“[52] Wie er weiter ausführte, ging es in dieser „reinen Naturwissenschaft“ darum, unter welchen Voraussetzungen das zweite grundlegende Erkenntnisvermögen des menschlichen Gemüts, der Verstand, eine gegenständliche Erfahrung überhaupt in objektiv gültige Urteile fassen könne. Auch diese Fähigkeit war in Kants Augen gehaltvoll und erlaubte daher eine synthetische Erkenntnis *vor* aller Erfahrung. Kant fasste seine umfänglichen diesbezüglichen Überlegungen dahingehend zusammen, dass die a priori erkennbaren „Grundsätze möglicher Erfahrung“, d.h. die obersten Regeln, „welche die Erscheinungen, nach der verschiedenen Form ihrer Anschauung, unter reine Verstandesbegriffe bringen, die das empirische Urteil objektivgültig machen“ zugleich die „allgemeine[n] Gesetze der Natur welche a priori erkannt werden können“ seien.[53] In prägnanter und viel zitierter Form lautete Kants Auffassung:

> Der Verstand schöpft seine Gesetze (a priori) nicht aus der Natur, sondern schreibt sie dieser vor.[54]

Ein wesentlicher Teil dieser „reinen Naturwissenschaft“, der Kant 1786 eine eigene Schrift über *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* widmete, war nach Kant eine „reine Mechanik“, als deren Grundbegriff er den der *Bewegung* ansah:

> Die Grundbestimmung eines Etwas, das ein Gegenstand äußerer Sinne sein soll, musste Bewegung sein; denn dadurch allein können diese Sinne affiziert werden. Auf diese führt auch der Verstand alle übrigen Prädikate der Materie, die zu ihrer Natur gehören, zurück, und so ist die Naturwissenschaft durchgängig eine entweder reine oder angewandte Bewegungslehre.[55]

[51] *Prolegomena*, S. 73.
[52] *Prolegomena*, S. 73 f.
[53] *Prolegomena*, S. 90.
[54] *Prolegomena*, S. 113.
[55] *Anfangsgründe*, S. XX.

Die im Rahmen einer „reinen" Mechanik vorgestellte Bewegung wiederum war in den Anschauungsformen von Raum und Zeit verankert:

> wenn man von den empirischen Anschauungen der Körper und ihrer Veränderungen (Bewegung) alles Empirische, nämlich was zur Empfindung gehört, weglässt, so bleiben noch Raum und Zeit übrig [...].[56]

Mithin ergab sich auch hier wiederum ein direkter Bezug der „reinen Naturwissenschaft" auf die „reine Mathematik". Ebenso wie Geometrie und Arithmetik a priori aus den Formen der (menschlichen) Anschauung gewonnen werden konnten, so konnte nach Kant eine sachlich gehaltvolle und „apodiktische Gewissheit" besitzende reine Mechanik vor aller Erfahrung aus der Vorstellung eines materiellen Etwas, das sich in Raum und Zeit bewegte, und den damit verbundenen Begriffen gewonnen werden. So war, wie Kant ausführte, nicht nur eine auf Geometrie und Größenlehre beruhende „Metaphysik der Natur" möglich, sondern er konnte auch einen weiteren, später berühmt gewordenen Leitsatz aufstellen:

> Ich behaupte aber, dass in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche [d.h. apodiktische Gewissheit besitzende] Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist.[57]

In einem seiner unveröffentlichten Manuskripte, in dem er das zuletzt genannte Werk Kants exzerpierte, machte Hausdorff sich über die darin entfaltete Idee einer „reinen Naturwissenschaft" ebenso lustig, wie er Kants Philosophie einer aus Anschauung a priori gezogenen „reinen Mathematik" für verfehlt ansah. Er hielt diesen Versuch für eine „unerhörte Wortmacherei, um die Kategorienlehre à outrance durchzusetzen".[58]

2.2.4 Die Antinomien

Während Kant einerseits danach strebte, jenseits der früheren Streitigkeiten eine „transzendentale" Grundlage einer gehaltvollen Lehre von Zeit und Raum und mithin der „reinen Mathematik" sowie einer „reinen Naturwissenschaft" zu geben, hoffte er andererseits in der „transzendentalen Dialektik" seiner *Kritik der reinen Vernunft* auch vorführen zu können, auf welche Weise die menschliche Vernunft sich immer wieder in widersprüchliche Aussagen über die Strukturen von Zeit, Raum und Materie sowie über die Vorstellungen von Freiheit und Notwendigkeit in einer durch Naturgesetze geprägten Welt verstrickte. Nach Kant geschah dies immer dann, wenn sie vergaß, dass Begriffe und Vorstellungen, die aus den (subjektiven, menschlichen) Bedingungen der Möglichkeit von Erfahrung geschöpft waren, für Dinge jenseits der Welt möglicher Erfahrung gebraucht wurden. Dazu wurde die Vernunft aber gleichsam natürlich verleitet,

[56] *Prolegomena*, S. 53.
[57] *Anfangsgründe*, S. VIII.
[58] NL Hausdorff, Fasz. 1077, Blatt 3-3v.

wenn sie die Gesamtheit aller Erscheinungen bzw. aller möglichen gegenständlichen Erfahrung betrachtete, d.h., wie Kant terminologisch festlegte, Ideen verfolgte, die als „Weltbegriffe“ zu bezeichnen waren.[59]

Dies betraf unter anderem auch Vorstellungen, die aus den Anschauungsformen Zeit und Raum gebildet wurden, namentlich aus der Vorstellung von Teilen der Zeit und des Raumes. So konnte für die Zeit der Inbegriff aller einem gegebenen „Augenblick“ vorausgehenden Zeitteile betrachtet werden. Kant verstand diese als die vollständige Reihe der „Bedingungen“ des gegebenen Augenblicks, und die Zeit selbst als „die formale Bedingung aller Reihen“.[60] Für den Raum wiederum konnte die Gesamtheit der in einem gegebenen Raumteil enthaltenen Raumteile sowie die Gesamtheit der diesen umgrenzenden Raumteile betrachtet werden; diese Gesamtheiten bildeten die „Bedingungen“ für das Vorhandensein von umgrenzten und „messbaren“ Raumteilen.[61] Je nachdem, ob die Vernunft sich nun der Idee eines absoluten Anfangs der Reihe der Zeitteile bzw. einer absoluten Grenze der umgebenden Raumteile hingab oder umgekehrt von einem unendlichen Regress dieser „Bedingungen“ eines gegebenen Augenblickes bzw. eines Raumteils ausging, bildete sie die „kosmologischen Ideen“ eines absoluten „Weltanfangs“ bzw. einer absoluten „Weltgrenze“, oder umgekehrt einer Zeit ohne Beginn bzw. eines grenzenlosen Raumes.[62]

Da es der Vernunft, die mit der Bildung dieser Ideen den Bereich jeder möglichen Erfahrung überschritt, unmöglich war, zwischen einander widersprechenden kosmologischen Ideen zu entscheiden, ergab sich hier ein erster Fall dessen, was Kant eine „Antinomie der reinen Vernunft“ nannte. Auf der einen Seite die These aufgestellt werden:

> Die Welt hat einen Anfang in der Zeit und ist dem Raume nach auch in Grenzen eingeschlossen.[63]

Auf der anderern Seite konnte ebenso gut die Antithese behauptet werden:

> Die Welt hat keinen Anfang und keine Grenzen im Raume, sondern ist, sowohl in Ansehung der Zeit als des Raums, unendlich.[64]

Die weiteren von Kant aufgezählten Antinomien betrafen kosmologische Ideen, die nicht aus den Anschauungsformen Zeit und Raum, sondern aus den Begriffen der Materie, der Kausalität und der Notwendigkeit gewonnen wurden.[65] Alle derartigen, das Weltganze betreffenden kosmologischen Fragen blieben für die menschliche Vernunft unentscheidbar.

Kants Ausführungen über Zeit und Raum bewegten sich mithin auf mehreren Ebenen zugleich. Suchte er einerseits, die frühere Diskussion über ein absolutes bzw. relatives Verständnis von Zeit und Raum dadurch zu überschreiten, dass

[59] KrV, A 407 f.
[60] KrV, A 411.
[61] KrV, A 412 f.
[62] KrV, A 418.
[63] KrV, A 426.
[64] KrV, A 426.
[65] KrV, A 413-415.

er beide als Formen der „reinen Anschauung" eines erkennenden (menschlichen) Gemüts charakterisierte, so war er andererseits bestrebt, mit dieser Wendung kosmologische Ideen wie die eines „Weltanfangs" oder einer „Weltgrenze" als (wenn auch naheliegende) Fiktionen eines Vernunftgebrauches kenntlich zu machen, der mit Erfahrungserkenntnis nichts mehr zu tun hatte. Jenseits dieser *kritischen* Haltung zur Kosmologie von Zeit und Raum – zu welcher Kant selbst früher beigetragen hatte – war ihm jedoch auch die *begründende* Funktion seiner transzendentalen Ästhetik und Naturlehre wichtig, namentlich die Idee einer substantiellen, auf Anschauungsformen und den Bewegungsbegriff gegründeten reinen Mathematik und Naturwissenschaft.

Während Hausdorff die kritische Tendenz von Kants Position durchaus anerkannte, blieb er der zweiten, positiven Funktion gegenüber äußerst skeptisch, wie die im vorliegenden Band veröffentlichten Texte in vielen Passagen erkennen lassen. Prägnant brachte er seine Haltung in einer Wendung eines nach 1900 entstandenen Manuskriptes zum Ausdruck:

> „Bedingungen möglicher Erfahrung" suchen ist sicher eines Philosophen würdig, gefunden ist noch keine.[66]

2.3 Eckpunkte der Debatten um Zeit und Raum in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts

Die europäische Wissens- und Wissenschaftskultur des 19. Jahrhunderts wurde von einer bemerkenswerten Vielzahl an Debatten über Zeit und Raum durchzogen, die das komplexe Feld, das sich um diese Themen bildete, für den historischen Blick schwierig machen. Verschiedene Fäden, die teils an die älteren Debatten und namentlich an Kants Versuch anschlossen, eine Alternative zu den früheren metaphysischen Kontroversen zu formulieren, teils aber auch neue Gesichtspunkte artikulierten, verflochten sich miteinander und berührten sehr unterschiedliche Wissenschaftsbereiche von der Mathematik und Physik bis hin zu den sich allmählich formierenden Disziplinen der Biologie und der experimentellen Psychologie. Die charakteristischen Bemerkungen, die Hausdorff seinen diesem Feld gewidmeten Texten häufig einleitend vorangestellt hat, zeugen von seinem Bewusstsein dieser Komplexität und zugleich von seinem Willen, kritisch zu intervenieren.

Richtet man nicht aus der Perspektive einer einzelnen Wissenschaft, etwa der Physik oder der Philosophie, sondern als Historiker den Blick auf die Themen des vorliegenden Bandes, wird zudem schnell deutlich, dass die angedeutete diskursive Komplexität erst vor dem Hintergrund einer historisch noch wesentlich weiter zurückreichenden praktischen Komplexität des Umgangs mit Zeit und Raum angemessen zu verstehen ist, welcher sich Hausdorff ebenfalls bewusst war, wie nicht zuletzt seine literarischen Schriften bezeugen.

---

[66] NL Hausdorff, Fasz. 1079, Blatt 1. Zu Hausdorffs Haltung gegenüber Kant vgl. auch den dritten und vierten Teil dieser Einleitung.

Nehmen wir etwa das Thema Zeit: Von Praktiken und Ritualen der Rhythmisierung zeitlicher Abläufe über den Bau von zeitanzeigenden Objekten bis zur abstrakten Spekulation über den Begriff „Zeit“ zeigt sich dem aufmerksamen Blick schnell, dass in allen Kulturen, über die wir halbwegs klare Auskunft besitzen, Zeit kein einfaches Grundkonzept war und nach wie vor ist, sondern eine komplexe und hybride Konstruktion oder Synthese, die sich aus einem nie ganz perfekt ausbalancierten und auszubalancierenden Zusammenspiel verschiedener natürlicher und technischer Rhythmen und verschiedener Schichten von Zeitvorstellungen und Zeitpraktiken (agrarischen, astronomischen, religiösen, politischen, technischen, wissenschaftlichen, ästhetischen und anderen) ergibt bzw. darin gesucht wird. Bereits die Artikulation dieses Befundes setzt freilich voraus, dass wir uns von einem bestimmten, eindeutigen Zeitkonzept und insbesondere von der die neuzeitliche Naturwissenschaft lange leitenden Vorstellung einer einheitlichen, homogenen und linearen Zeit gelöst haben, wie sie im Werk Newtons erreicht und zugleich kanonisiert wurde, und wie sie noch Kants Versuch einer transzendentalen Ästhetik zugrundeliegt.

Die Auflösung einer festen Zeitvorstellung – der des „naiven Realismus“, wie Mongré schreibt, genauer eigentlich: die Auflösung eines aus der Newtonschen Mechanik hervorgegangenen, mit einer festen Zeitvorstellung verbundenen Weltbildes – ist selbst ein allmählicher historischer Prozess, der spätestens in der Mitte des 19. Jahrhunderts einsetzte und bis heute nicht beendet ist. Um diese Auflösung geht es in Hausdorffs Schriften, und zwar *vor* einer Zeit, in der Relativitätstheorie oder die Theorie irreversibler Prozesse eine solche Modifikation der Zeitvorstellungen aus der Wissenschaft der Physik selbst heraus weitergetrieben haben. Hausdorffs Intervention bewegt sich dabei auf einer dem Kantschen Anliegen verwandten Ebene, der Ebene einer Kritik der menschlichen Erkenntnismöglichkeiten. Anders als Kant konnte er aber an die einschlägigen und allmählich ein immer größeres Spektrum umfassenden Beiträge zu dem skizzierten Wissens- und Wissenschaftsfeld anknüpfen.

Im 19. Jahrhundert diskutierten Biologen die Zeitempfindung von Tieren, in der Sinnesphysiologie begannen Wissenschaftler die Zeitwahrnehmung des Menschen experimentell zu untersuchen – Hausdorff war als Student eine der Versuchspersonen. Nietzsche spielte die Figur einer ewigen Wiederkehr des Gleichen philosophisch durch, während in der statistischen Physik die Ergodenhypothese diskutiert wurde. Ein etwas obskurer französischer Absolvent der École Polytechnique, Auguste Calinon, skizzierte eine Mechanik mit mehrdimensionalem Zeitparameter, und 1889 erschien die Dissertation des Philosophen Henri Bergson, die ein neues phänomenologisches Konzept der *durée* explorierte. Viele weitere Beispiele ließen sich als Eckpunkte des diskursiven Feldes der Revision der Zeitvorstellungen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts markieren. Hausdorffs eigener Beitrag zur Kritik der Zeitvorstellungen kann selbst als ein solcher Eckpunkt angesehen werden. Dieses Feld spielte eine wichtige Rolle in der Genese der kulturellen und wissenschaftlichen Moderne. Die genauen Beziehungen und Dynamiken innerhalb desselben sind bei weitem noch nicht umfassend geklärt.

Verfolgen wir die Entwicklung ins 20. Jahrhundert weiter, so partizipierten nicht nur Poincaré und Einstein an dem skizzierten Feld von Debatten und Bemühungen[67], sondern auch viele andere, wie etwa Moritz Schlick in Rostock und später Wien[68], der französische Wissenschaftsphilosoph Gaston Bachelard, der eine entschieden anti-Bergsonianische Philosophie des Augenblicks verteidigte[69], Norbert Wiener in Cambridge, Mass.[70] und weitere, heute weniger bekannte Autoren. Hierbei sind die Autoren des philosophischen Kanons wie Edmund Husserl oder Martin Heidegger, die sich in Weiterführung der einschlägigen philosophischen Debatten des 19. Jahrhunderts um das Phänomen und Konzept der Zeit bemühten, noch nicht einmal erwähnt.

Ähnliches gilt für den Raum. Auch diese Vorstellung ergab sich historisch aus einem Zusammenspiel ganz unterschiedlicher Komponenten, von der ihrerseits vielfältigen alltäglichen Erfahrung in räumlichen Umgebungen über kulturelle – etwa agrarische, politische, religiöse – Deutungen des erlebten Raumes und ebensolchen Imaginationen desselben bis hin zu begrifflichen Festlegungen in verschiedenen Wissenschaften. Für den Raum verschob freilich mehr als für die Zeit vor allem eine Entwicklung in und zwischen den Wissenschaften der Mathematik und Physik den Rahmen der Diskussionen entscheidend, nämlich die bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts ganz unerwartete Einsicht, dass der tradierte Rahmen zur mathematischen Beschreibung des physischen Raumes, das von Euklid fixierte System der traditionellen Geometrie, aus mathematischer Sicht Alternativen besaß. Je weiter sich diese Einsicht entfaltete, desto stärker wurde auch für die Physik die grundlegende Frage, welche geometrische Form dem Raum zukommt, in dem sich die physikalischen Vorgänge ereigneten, zum Gegenstand einer erneuten Reflexion. Ebenso wie sich die feste Vorstellung einer homogenen Zeit auflöste, so geriet hier – aus anderen Gründen – auch die vermeintliche Gewissheit der Raumvorstellung der geometrischen Tradition in Zweifel. Auch hier verstärkten sich unter diesem Eindruck die seit der frühen Neuzeit geführten Diskussionen über die Natur der objektiven und der subjektiven Elemente unserer Raumvorstellungen, die von der Philosophie bis zur Psychologie kontrovers diskutiert wurden.

2.3.1 Noch einmal: Zur Wahrnehmung von Zeit und Raum

In dem Augenblick, in dem Kants kritische Relativierung der Zeit- und Raumvorstellungen sowie der grundlegenden Kategorien des Verstandes auf die Erkenntnisvermögen des menschlichen Gemüts naturalistisch gewendet wurde – was bereits in der Generation nach Kant begann – setzte ein komplexer Prozess der Umdeutung und Erweiterung erkenntnistheoretischer Begriffe ein. In welchem Maß waren Formen wie Zeit und Raum, Konzepte wie Ursache und Wirkung usw. spezifische Eigenschaften der biologischen Spezies Mensch?

[67]Vgl. dazu, neben vielen anderen, [Galison 2003].
[68]Beginnend mit [Schlick 1917], vgl. dazu Abschnitt 5.2.
[69]Vgl. [Bachelard 1932].
[70]Vgl. das Kapitel „Newtonian and Bergsonian Time“ in [Wiener 1948].

Diese allmähliche Naturalisierung der Erkenntnislehre kann hier nicht ausführlich dargestellt werden. Sie führte sowohl in die im Lauf des 19. Jahrhunderts entstehende Psychologie der menschlichen Wahrnehmung und Kognition (u.a. schon früh bei Jakob Friedrich Fries und Johannes Müller, später dann in weiterer Entfaltung bei Gustav Theodor Fechner, Hermann v. Helmholtz, Wilhelm Wundt, William James und anderen) als auch in die biologischen Debatten um Entwicklung und Evolution der Spezies, und sie hallte vielfältig in den philosophischen Debatten des späteren 19. Jahrhunderts wieder.

Ein Zeugnis dieser Verschiebungen ist eine vielgelesene Rede von Hermann Helmholtz aus dem Jahr 1855 aus Anlass der Enthüllung eines Kant-Denkmals in Königsberg. Hausdorff war zumindest indirekt mit ihrem Inhalt vertraut, da sie zu den wesentlichen Ausgangspunkten für das Hauptwerk *Die Analysis der Wirklichkeit* des Neukantianers Otto Liebmann zählte, das Hausdorff ausführlich rezipierte und auf das unten noch näher eingegangen wird. Betitelt „Ueber das Sehen des Menschen", nahm sich die Rede von Helmholtz das Verhältnis der Philosophie zu naturwissenschaftlicher Erkenntnis am Thema der Sehwahrnehmung vor. Anknüpfend an Johannes Müllers Lehre von den spezifischen Sinnesenergien – zusammengefasst in der These:

> Die Qualität unserer Empfindungen, ob sie Licht oder Wärme, oder Ton, oder Geschmack u. s. w. sei, hängt nicht ab von dem wahrgenommeneu äusseren Objecte, sondern von dem Sinnesnerven, welcher die Empfindung vermittelt.[71]

– erläuterte Helmholtz seinem Publikum die Physiologie des Auges und die daraus sich ergebenden Möglichkeiten räumlichen Sehens. Dabei zog er ausdrücklich eine Parallele zu Kants Erkenntniskritik:

> Gerade dasselbe, was in neuerer Zeit die Physiologie der Sinne auf dem Wege der Erfahrung nachgewiesen hat, suchte Kant schon früher für die Vorstellungen des menschlichen Geistes überhaupt zu thun, indem er den Antheil darlegte, welchen die besonderen eingeborenen Gesetze des Geistes, gleichsam die Organisation des Geistes, an unseren Vorstellungen haben.[72]

War diese Parallele zutreffend, so musste nun auf dem Weg der physiologisch-psychologischen Untersuchung verfolgt werden, wie Menschen sich anhand ihrer Sinne Vorstellungen wie die des Raumes bildeten. Helmholtz sah diese Leistung als aus zwei Schritten bestehend an: Zunächst lieferten die Sinnesorgane auf physiologisch untersuchbare Weise Empfindungen – im Falle der Augen die Nervenerregungen der Netzhäute der beiden Augen sowie die Muskelempfindungen der Augenstellung und -bewegung. Diese mussten dann im Geist bzw. Verstand durch einen Prozess des gewohnheitsmäßigen (erlernten oder angeborenen) Schließens zur eigentlichen (hier: räumlichen) Wahrnehmung zusammengefügt werden. In seinem 1867 erschienenen *Handbuch der physiologischen*

[71] [Helmholtz 1855], S. 18.
[72] Ebd., S. 19.

Optik entfaltete Helmholtz diese Überlegungen wesentlich weiter und diskutierte ausführlich die physiologischen Voraussetzungen des monokularen und binokularen Sehens, ferner die Rolle der Augenbewegungen und andere Themen. Dabei arbeitete er auch seine Überlegungen zu den in der Raumwahrnehmung erfolgenden psychischen Leistungen weiter aus. Er stellte sie in einer umfassenden Auseinandersetzung der von ihm als „nativistisch“ bezeichneten Position gegenüber, die unter anderen Johannes Müller und Ewald Hering eingenommen hatten, und nach welcher sich die Wahrnehmung räumlicher Verhältnisse einem angeborenen Mechanismus verdankte, der die räumliche Anordnung der Nervenreizungen in den Sinnesorganen (namentlich das Netzhautbild) direkt in eine bewusste Wahrnehmung äußerer räumlicher Beziehungen übersetzte.[73] Demgegenüber suchte Helmholtz zu zeigen, dass die Nervenerregungen lediglich als „Zeichen“ zu verstehen waren, welche durch „psychische Thätigkeit“ gedeutet wurden. Insbesondere gaben die Erregungen lokalisierter Nerven (etwa in der Netzhaut) „Localzeichen“, aus denen dann durch einen Lernprozess und unbewusste, rasche Gewöhnung auf räumliche Verhältnisse geschlossen wurde – eine „unbewusste, induktive Schlussfolgerung“, die sich jederzeit als empirisch falsch herausstellen und zum Phänomen der Sinnestäuschungen führen konnte. Helmholtz bezeichnete diesen eigenen Standpunkt als die „empiristische Ansicht“ und fasste zusammen:

> Der Hauptsatz der empiristischen Ansicht ist: Die Sinnesempfindungen sind für unser Bewusstsein Zeichen, deren Bedeutung verstehen zu lernen unserem Verstande überlassen ist.[74]

Sowohl die Untersuchung der Sinnesorgane und der von ihnen erzeugten Empfindungen als auch das Studium der sich daran anschließenden psychischen Leistungen konnte somit auf naturwissenschaftlich-empirischem Wege verfolgt werden, auch wenn die Psychologie hierin nach Helmholtz’ Einschätzung noch nicht weit gedrungen war. Kants „Anschauungsformen“, so lautete seine Botschaft, mussten auf diesem Wege weitergedacht und erforscht werden. Dadurch geriet freilich auch ihr Status als Quellen allgemeiner und notwendiger Erkenntnis in Bedrängnis, und insbesondere die ihnen von Kant zugewiesene Rolle als Grundlage der Mathematik.

Als zweiten markanten Eckpunkt der Naturalisierung Kantischer Motive in der Erkenntnistheorie greife ich eine Schrift aus dem Jahr 1864 heraus, in welcher der Zeitbegriff thematisiert wurde. Auch sie hat (direkt oder indirekt über das Werk Otto Liebmanns) eine wichtige Rolle für Hausdorff gespielt. Die Schrift stammt aus der Feder des an der Petersburger Akademie tätigen Biologen Karl Ernst von Baer und geht auf eine Rede zurück, die Baer im Jahr 1860 zur Eröffnung der Russischen Entomologischen Gesellschaft gehalten hatte. Sie trug den Titel „Welche Auffassung der Natur ist die richtige? Und wie ist diese Auffassung auf die Entomologie anzuwenden?“[75] Baer plädierte darin – noch

[73] [Helmholtz 1867], S. 442 und öfter.
[74] [Helmholtz 1867], S. 797.
[75] [Baer 1864], S. 237-284.

unabhängig von Darwins Evolutionslehre, aber mit deutlichen Spuren der idealistischen Naturphilosophie – dafür, den „Haushalt der Natur“ grundsätzlich als in zeitlichen Prozessen verlaufend zu verstehen; erst eine solche dynamische Auffassung werde den „Naturproducten“ gerecht. Dabei sei freilich zu beachten, dass verschiedene Naturphänomene mit sehr verschiedenen charakteristischen Zeitmaßen – oder Geschwindigkeiten – verbunden seien. Gerade an der Vielfalt von Insektenarten, deren Lebensspannen sehr unterschiedlich waren, zeige sich die Bedeutung solcher spezifischer Zeitmaße. Um diesen Punkt zu verdeutlichen, fügte Baer seiner Rede eine eindrucksvolle, ausführliche Fiktion bei, die erneut an das kosmologische Motiv der Pluralität der Welten anknüpfte, diese Pluralität aber konsequent in die Wahrnehmungswelten biologischer Arten verlagerte. Obwohl sich uns Menschen gewisse natürliche Rhythmen (insbes. die astronomischen Rhythmen Tag, Monat und Jahr) aufdrängen, so Baer, so müssen wir doch die „Grundmaaße, um wieder diese Naturmaaße abzumessen, [...] aus uns selbst nehmen“.[76] Das zeige sich nicht zuletzt in der Sprache, wenn wir die kleinsten Zeitmaße anthropomorph fixieren und etwa vom sogenannten „Augenblick“, der eben die nicht verschwindende Dauer eines Blickes bezeichne, oder (in lateinischer Sprache) von einem *punctum temporis* oder einem *momentum* sprechen: Der *punctum* sei die Dauer der Empfindung eines Stichs, das *momentum* die Zuckung, die in Reaktion hierauf erfolge. Die kleinste Einheit der Zeitwahrnehmung dachte Baer als kleinste wahrnehmbare Zeitdauer, als Dauer einer minimalen Empfindung:

> Indessen ist das eigentliche Grundmaaß, mit welchem unsere Empfindung wirklich mißt, [...] die Zeit, die wir brauchen, um uns eines Eindrucks auf unsere Sinnesorgane bewußt zu werden.[77]

Dieses an Berkeleys *minimum perceptibile* erinnernde minimale Zeitmaß war, so Baer, letzlich physiologisch verankert (und vielleicht experimentell zugänglich). Insbesondere konnte es von Spezies zu Spezies verschieden sein. Für den Menschen, so Baer mit vagem Bezug auf erste sinnesphysiologische Experimente, dauere die minimale Empfindung zwischen 1/10 und 1/6 Sekunde.[78] Auch die Sekunde, so Baer, war letztlich anthropologisch ausgezeichnet: Sie entsprach ungefähr einem Pulsschlag.

Die Pointe Baers hierbei war nun, dass je nach dem spezifischen Zeitmaß einer Spezies deren sinnliche Wahrnehmung zu einem sehr unterschiedlichen Bild der Natur führen konnte, ja musste:

> Denken wir uns einmal, der Lebenslauf des Menschen verliefe viel rascher, als er wirklich verläuft, so werden wir rasch finden, dass ihm alle Naturverhältnisse ganz anders erscheinen würden. Um die Verschiedenheit [...] recht auffallend zu machen, wollen wir den Unterschied in der

[76] [Baer 1864], S. 254.

[77] Ebd., S. 255.

[78] Baer rechtfertigte diese Angabe in einer längeren Fußnote durch eine Kritik an einer anderen Bestimmung dieser minimalen Wahrnehmungsdauer durch den Physiologen Gabriel Valentin, vgl. ebd., S. 256-258.

> Lebenslänge auch recht groß nehmen. Jetzt erreicht der Mensch ein hohes Alter, wenn er 80 Jahre alt wird oder 29.200 Tage mit den dazugehörigen Nächten. Denken wir uns einmal, sein Leben wäre auf den tausendsten Teil beschränkt. Er wäre also schon sehr hinfällig, wenn er 29 Tage alt ist. Er soll aber nichts von seinem inneren Leben dabei verlieren, und sein Pulsschlag soll 1000 Mal so schnell sein, als er jetzt ist. Er soll die Fähigkeit haben, wie wir, in dem Zeitraum von einem Pulsschlag zum andern 6-10 sinnliche Wahrnehmungen aufzufassen. Er würde gar Manches sehen, was wir nicht sehen. Er würde z.B. einer ihm vorbeifliegenden Flintenkugel, die wir nicht sehen, weil sie zu schnell ihren Ort verändert, [...] mit seinen Augen und ihrer raschen Auffassung sehr leicht folgen können. Aber wie anders würde ihm die gesammte Natur erscheinen, die wir in ihren wirklich bestehenden Zeitmaaßen lassen. „Da ist ein herrlich leuchtendes Gestirn am Himmel" würde er in seinem Alter sagen, „das sich erhebt und wieder senkt und dann längere Zeit weg bleibt, aber später doch immer wieder kommt, um Licht und Wärme zu verbreiten, denn ich sehe es schon zum neunundzwanzigsten Male. Aber es war noch ein anderes Gestirn am Himmel, das wurde erst, als ich ein kleines Kind war, und war zuerst ganz schmal und sichelförmig [...] bis es ganz rund wurde und die ganze Nacht hindurch leuchtete [...]. Aber dieses Nachtgestirn wurde wieder kleiner und stieg immer später auf, bis es endlich jetzt ganz verschwunden ist. Mit dem ist es also vorbei, und die Nächte werden nun immer dunkel bleiben." [...] Von dem Wechsel der Jahreszeiten würde ein solcher Monaten-Mensch wohl keine Vorstellung haben; wenigstens aus eigener Erfahrung nicht. Könnte er aber die Erfahrungen seiner Vorgänger benützen, so würde er mit Staunen hören oder lesen, dass es Zeiten gegeben haben soll, in denen die Erde ganz mit einer weißen Substanz, dem Schnee, bedeckt war..." gleich den Eiszeiten.[79]

Baer spann diese Phantasie detailliert weiter aus und ergänzte sie durch die komplentäre Fiktion eines sehr viel langsamer wahrnehmenden Menschen. Es ging ihm offensichtlich darum, Verständnis dafür zu wecken, dass eine andere Spezies, etwa eine kurzlebige Insektenart, die Natur ganz anders wahrnehmen würde als der Mensch. Dennoch lagen in seinen Fiktionen erkenntnistheoretische Provokationen: Musste nicht auch unsere menschliche Zeitwahrnehmung als eine kontingente Konsequenz unserer physischen Organisation verstanden werden? Könnte aus demselben Grund unser Bild der Natur ein kontingentes Resultat der physischen Möglichkeiten unserer Empfindung und Wahrnehmung von Naturvorgängen sein, bis hin zum Wahrnehmen oder Nichtwahrnehmen bestimmter Naturvorgänge, also bis zur Frage, was uns überhaupt als Gegenstand der Erfahrung gelten konnte?

Baers Ausführungen können als Zeugnis dafür gelesen werden, wie sich eine auf die Sinnesphysiologie gestützte Erkenntnistheorie ab der Jahrhundertmitte radikalisierte. Zum einen tauchte mit der Speziesrelativität der aus den Sinnen gezogenen Erkenntnismöglichkeiten und der daraus sich ergebenden Bilder der äußeren Welt ein Motiv auf, an das später nicht nur Nietzsche, sondern auch

[79] [Baer 1864], S. 259 f.

der Neukantianismus anknüpfte und das schließlich, wie wir sehen werden, in Hausdorffs erkenntniskritischen Schriften weiter radikalisiert wurde. Zum anderen verstärkten solche Überlegungen das Interesse an einer experimentellen Untersuchung der menschlichen Wahrnehmung. Dabei entwickelte sich gerade die Bestimmung von Zeitabläufen im Zusammenspiel von Wahrnehmung, Denken und Handeln zu einer zentralen experimentellen Technik.[80] Die Baersche Frage nach der minimalen Dauer einer Wahrnehmung wurde dabei ergänzt durch Fragen nach der Leitgeschwindigkeit von Nervenerregungen und nach der experimentaltechnisch gut fassbaren minimalen Dauer von Reaktionen auf Wahrnehmungsreize.

Hausdorff hat solche Experimente im Sommersemester 1888 in Freiburg bei einem der frühen bedeutenden experimentellen Psychologen selbst kennengelernt. Dort nahm er an Experimenten Hugo Münsterbergs teil, der in Freiburg eines der ersten experimentalpsychologischen Labore einrichtete und insbesondere Versuche über das Zeitempfinden von Individuen anstellte, die sich auf einen „von Wundt konstruierten Zeitsinnapparat in der Anordnung, welche Glass verwendete“, stützte. Dabei ging es Münsterberg um den Nachweis, dass das Zeitempfinden von periodischen Veränderungen des Muskelapparates und insbesondere der Atmung, allgemein von wechselnden „Spannungszuständen“ des Individuums abhing, nicht jedoch von einer dem Bewusstsein eigenen inneren Zeiteinheit.[81] Wie Helmholtz und Baer war sich auch Münsterberg bewusst, dass ein solcher experimenteller Nachweis Kants frühere Überlegungen in entschiedener Weise naturalisierte. Seine Abhandlung über den „Zeitsinn“ schloss mit den Worten:

> [Nicht] die physisch unbedingte transcendentale Apperception fungiert in ihrer Zeitauffassung periodisch, sondern diejenigen physiologischen Erregungen, deren centripetale Wirkung unsere Zeitvorstellung ist, unterliegen periodischem Wechsel. [...] Die Metaphysik muss es sich wieder einmal gefallen lassen, dass ein Besitzanspruch des transcendentalen Bewusstseins für ungültig erklärt wird und dem sensomotorischen Reflexapparat des Körpers übertragen wird.[82]

Der von Münsterberg mit seinen Studenten angestrebte experimentelle Nachweis lag durchaus auf der von Baer vorgezeichneten Linie einer Relativität der Zeitwahrnehmung in Bezug auf die körperliche und sinnesphysiologische Organisation. Sie ging jedoch insofern über Baer hinaus, als nicht nur die biologische Spezies der Wahrnehmenden für diese Organisation verantwortlich war, sondern darüber hinaus auch der körperliche Zustand des einzelnen wahrnehmenden Individuums. Wie wir noch sehen werden, sollte Hausdorff in diesem Punkt Münsterberg folgen: Auch für ihn waren die Wahrnehmungsleistungen

[80]Vgl. dazu allgemein [Schmidgen 2015].

[81]Vgl. [Münsterberg 1899]; Hausdorff wird mehrfach erwähnt im dritten Teil dieser Abhandlung. Die Versuche sind näher beschrieben in Hausdorffs Biographie, HGW, Band IB, S. 177-179. Zur wechselvollen Geschichte des „Zeitsinnapparates“ vgl. die in der vorigen Anmerkung genannte Studie von Schmidgen.

[82][Münsterberg 1889], S. 68.

von Zeit und Raum Leistungen der einzelnen Individuen, nicht allgemeinerer Einheiten. Zugleich blieb er von Münsterbergs entschiedenem Empirismus in Bezug auf die Psychologie geprägt.[83]

2.3.2 Mathematikhistorischer Hintergrund

Selbstverständlich bildeten für Hausdorff die mathematischen Entwicklungen des 19. Jahrhunderts den vielleicht wichtigsten Hintergrund seiner Überlegungen zu Zeit und Raum; für seine Vorlesungen und Publikationen zur Geometrie gilt dies ohnehin. Es erübrigt sich an dieser Stelle, eine weitere Geschichte der Entdeckung und Verbreitung der nichteuklidischen Geometrien zu geben.[84] Die Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* und sein Nachlass erlauben jedoch, eine knappe Skizze jener mathematikhistorischen Aspekte zu geben, die ihn in diesem Zusammenhang besonders interessiert haben.

Dies waren zum einen die klassisch gewordenen Beiträge zu den nichteuklidischen Geometrien, namentlich die beiden im Jahr 1868 erschienenen, viel gelesenen und auch von Hausdorff wiederholt zitierten Beiträge zur Interpretation der nichteuklidischen Geometrien, die entscheidend zur allgemeinen Durchsetzung der früheren Ideen von Nikolai Lobatschewski und János (Johann) Bolyai beitrugen, der „Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea“ von Eugenio Beltrami und der Aufsatz „Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen“ von Hermann Helmholtz.[85] Auch auf die in anderer und wesentlich allgemeinerer Form durch Bernhard Riemann geprägte analytische Fassung einer Geometrie der Mannigfaltigkeiten, die ebenfalls im Jahr 1868 durch den Druck von Riemanns Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“ bekannt wurde, verwies Hausdorff später bei vielen Gelegenheiten.[86] Auf die nur wenig später durch Felix Klein vorgeschlagene Vereinheitlichung der nichteuklidischen Geometrien im Rahmen der projektiven Geometrie[87] griff Hausdorff insbesondere im Rahmen seiner Vorlesungen und seines eigenen kurzen Beitrags „Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie“ wiederholt zurück, ebenso wie auf die andersartige, durch Wilhelm Killing verbreitete Darstellung der hyperbolischen Geometrie durch die sogenannten „Weierstraßschen Koordinaten“.[88]

Wie Beltrami und Helmholtz verwies auch Hausdorff in seinen späteren Veröffentlichungen und Vorlesungen zur Einführung der zweidimensionalen

[83] Vgl. unten, Abschnitt 4.4.2.

[84] Interessierte Leserinnen und Leser seien u.a. auf die folgenden Darstellungen verwiesen: [Reichardt 1985], [Gray 1989]. Auf philosophische Aspekte sowie Fragen der Rezeption gehen ein: [Toretti 1978], [Volkert 2013]. Eine zeitgenössische Materialsammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, auf die Hausdorff in seinen Schriften verwies, ist [Stäckel/Engel 1895], vgl. u.a. *Das Raumproblem* und NL Hausdorff, Fasz. 994, Blatt 26.

[85] [Beltrami 1868], [Helmholtz 1868].

[86] [Riemann 1868].

[87] Vgl. insbesondere [Klein 1871] und [Klein 1893].

[88] Vgl. [Killing 1885a]. Wie er in seinem Beitrag „Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie“ schrieb, hielt Hausdorff diesen analytischen Zugang „ohne projective Einleitung“ als „natürlichstes Requisit in der analytischen Geometrie“ der hyperbolischen Ebene für „noch lange nicht genug gewürdigt“. Vgl. ebd., S. 161 und 165.

nichteuklidischen Geometrien zunächst auf die Ende der 1830er Jahre erschienenen Arbeiten von Ferdinand Minding über die Flächen konstanter negativer Krümmung, die ihrerseits wiederum auf das von Carl Friedrich Gauss in seinen 1828 veröffentlichten *Disquisitiones circa superficies curvas* eingeführte Maß der Flächenkrümmung zurückgriffen. Während diese älteren Arbeiten zur Differentialgeometrie gekrümmter Flächen noch keine Revision des Verständnisses der Geometrie (des dreidimensionalen Raumes) selbst erforderlich machten, änderte sich dies zum einen durch die nichteuklidischen Geometrien in drei Dimensionen, zum andern durch das in Riemanns Habilitationsvortrag skizzierte Programm einer sehr viel allgemeineren Herangehensweise an eine Theorie mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten und die Einführung eines hierauf bezüglichen Konzeptes des Krümmungsmaßes.[89]

Was die anschauliche und epistemologische Erläuterung der zu seiner Zeit und in seinem mathematischen Umfeld bereits fest etablierten nichteuklidischen Geometrien betraf, bezog Hausdorff sich in seinen nichtmathematischen Texten vor allem auf die viel gelesenen Beiträge von Helmholtz, so besonders in ausführlichen Zitaten in seiner Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* und in seiner Leipziger Antrittsvorlesung *Das Raumproblem.*[90] Insbesondere in seinem Vortrag „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome“ vor dem Heidelberger Dozentenverein 1870 betonte Helmholtz, dass die Beiträge von Riemann und Beltrami es erlaubten, einen von Kants Vorstellung der Verankerung der Mathematik in „reiner Anschauung“ ganz unabhängigen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie auf rein analytischem Weg zu entwickeln. Dennoch war es Helmholtz wichtig zu zeigen, dass auch eine „Veranschaulichung“der nichteuklidischen Geometrien möglich war. Diese Überzeugung war mit Helmholtz’ Überlegungen zur physiologischen Optik eng verbunden, indem sie von die Frage ausging, welche anschaulichen Vorstellungen ein Lebewesen haben müsste, das sich in einem nichteuklidischen Raum bewegte. Helmholtz erläuterte diese Frage:

> Unter dem viel gemissbrauchten Ausdrucke „sich vorstellen“ oder „sich denken können, wie etwas geschieht“ verstehe ich – und ich sehe nicht, wie man etwas Anderes darunter verstehen kann, ohne allen Sinn des Ausdrucks aufzugeben –, dass man sich die Reihe der sinnlichen Eindrücke ausmalen könne, die man haben würde, wenn so etwas in einem einzelnen Falle vor sich ginge.[91]

Um eine solche nichteuklidische Wahrnehmung räumlicher Verhältnisse „auszumalen“, stützte Helmholtz sich auf zwei Verfahren. Zum einen griff er auf die von Beltrami gegebene „Interpretation“ des „pseudosphärischen“ (hyperbolischen) Raums durch eine Abbildung in das Innere einer Kugel des Euklidischen Raums zurück, welche die Punkte, Geraden und Ebenen des pseudosphärischen

[89]Vgl. dazu [Scholz 1980].

[90]Vgl. z.B. *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 99-101; dazu mehr unten, Abschnitte 3.4 und 4.3.1.

[91][Helmholtz 1870], S.8.

Raumes in Punkte, Geraden- und Ebenensegmente des Kugelinneren abbildete und zugleich die Messung von Abständen und Winkeln anhand eines passenden analytischen Ausdrucks transformierte.[92]

Als zweite Möglichkeit, die Verhältnisse eines nichteuklidischen Raumes für ein an euklidische Vorstellungen gewöhntes Wesen zu veranschaulichen, verwies Helmholtz auf das Verhalten von Abbildern räumlicher Gegenstände und Bewegungen in gekrümmten Spiegeln. Ähnlich wie uns in solchen Spiegeln Gegenstände und Bewegungen verzerrt erschienen und bewegte Gegenstände ihre Form scheinbar veränderten, würde sich auch das Verhalten von Körpern in einem pseudosphärischen Raum gestalten, den wir mit unseren (an Euklidische Verhältnisse gewöhnten) Augen sehen würden.[93]

In seiner Diskussion solcher Veranschaulichungen betonte Helmholtz wiederholt, dass die in dieser Analogie wahrgenommen, scheinbaren Deformationen von Körpern sich bei einer tatsächlichen Messung als inexistent erwiesen: Ganz im Gegenteil würde eine allein auf Messung beruhende Geometrie in allen Fällen – bei Voraussetzung eines dreidimensionalen Euklidischen ebenso wie eines „pseudosphärischen“ oder „sphärischen“ Raumes – ergeben, dass eine Bewegung von Körpern ohne Formveränderung möglich war. Eine solche freie Beweglichkeit von „starren Körpern“ hielt Helmholtz in der Tat nicht für eine empirische Aussage, sondern für eine Bedingung der Möglichkeit geometrischer Erfahrung.[94] Helmholtz hatte zunächst irrtümlich geglaubt, dass diese Bedingung den Euklidischen Raum unter allen Alternativen auszeichne. Erst die durch die Lektüre des Riemannschen Habilitationsvortrages gewonnene Einsicht, dass auch im „pseudosphärischen“ und „sphärischen“ Raum eine freie Beweglichkeit starrer Körper möglich war, hatte Helmholtz die Bedeutung der nichteuklidischen Alternativen klar gemacht.[95]

Aus der hiermit aufgeworfenen Frage entstand ein in den Folgejahren mehrfach diskutiertes Bündel von mathematischen Problemen, das auch Hausdorff wiederholt beschäftigte. Welche „Raumformen“ – diesen Begriff schlug insbesondere Wilhelm Killing zur Behandlung dieser Fragen vor[96] – erlaubten eine freie Beweglichkeit starrer Körper? Je nachdem, wie die in dieser Frage verwendeten Begriffe mathematisch präzisiert wurden, verzweigte sich das Problem in verschiedene Richtungen. Wurde, wie dies Helmholtz und Killing mit unterschiedlichen Argumenten vorschlugen, die „freie Beweglichkeit fester Körper“ in den Rahmen der Theorie Riemannscher Mannigfaltigkeiten gestellt und aus

[92]Eine nähere Ausführung ist an dieser Stelle unnötig: Interessierte Leserinnen und Leser finden sie aus Hausdorffs Hand in seinem für ein nichtmathematisches Publikum geschriebenen Aufsatz „Nichteuklidische Geometrie“, in diesem Band.

[93]Auf die philosophischen Konsequenzen, die Helmholtz aus diesen Möglichkeiten der Veranschaulichung zog, wird in Abschnitt 2.3.6 näher eingegangen.

[94]Am deutlichsten ausgeführt in [Helmholtz 1878], vgl. dazu unten, 2.3.6.

[95]Vgl. [Helmholtz 1868.]

[96]Zunächst in mehreren Aufsätzen, u.a. [Killing 1878], [Killing 1879], dann in zusammenfassender Darstellung in seiner Monographie *Die nicht-euklidischen Raumformen* [Killing 1885a]. Killing hatte das Wort „Raumform“ aus der 1876 gedruckten Monographie *Elemente der absoluten Geometrie* von Johannes Frischauf übernommen, wie seine Rezension dieses Buches belegt.

der Forderung der „freien Beweglichkeit starrer Körper“ die Folgerung gezogen, dass eine Raumform von konstanter Krümmung sein musste, so ergab sich das Problem einer Klassifikation der Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung in drei (und ggf. mehr) Dimensionen.

Auch hier boten sich jedoch noch mehrere Möglichkeiten der Interpretation des Problems, je nachdem, welche weiteren Eigenschaften des Raumes in der Bedingung der „freien Beweglichkeit starrer Körper“ vorausgesetzt wurden. Killing nahm zunächst an, dass diese Bedingung die Existenz von abstandserhaltenden Transformationen der Raumform als Ganzer verlangte, und schloss hieraus, dass es nur vier dreidimensionale Raumformen mit freier Beweglichkeit gab: den Euklidischen Raum, den pseudosphärischen Raum, den sphärischen Raum und seine „Polarform“, in welcher die beiden Schnittpunkte zweier sich schneidender Geraden miteinander identifiziert wurden.[97] Nach einem Austausch mit Felix Klein in den Jahren 1890 und 1891 schwächte Killing diese Bedingung jedoch ab und forderte nur noch die Existenz von Isometrien zwischen (durch einen gewissen Radius begrenzten) lokalen Gebieten der Raumformen. Raumformen, welche dieser Bedingung genügten, nannte er nun „Clifford-Klein'sche Raumformen“.[98] Klein hatte vorgeführt, wie sich mit Techniken, die William Kingdon Clifford in die projektive Geometrie eingeführt hatte, solche Raumformen konstruieren ließen. Insbesondere hatte Clifford bereits 1873 ein Beispiel einer in den dreidimensionalen elliptischen Raum eingebetteten Fläche konstanter verschwindender Krümmung angegeben, die von der euklidischen Ebene verschieden (und topologisch einer Torusfläche äquivalent) war. Damit näherte Killing sich jener Fassung des Raumformenproblems an, die im 20. Jahrhundert von Heinz Hopf und anderen weiter bearbeitet wurde.

In seiner Bearbeitung des Problems der freien Beweglichkeit in Mannigfaltigkeiten hatte Helmholtz ein Argument gegeben, das nach seiner Ansicht erlaubte, aus dieser Bedingung auf die Existenz einer Riemannschen Metrik in der Mannigfaltigkeit zu schließen. Dieses Argument litt jedoch, wie Sophus Lie in späteren Arbeiten ausführte, unter einer unklaren Vermischung von Überlegungen über die infinitesimalen Bewegungen von Körpern bzw. Figuren und Überlegungen über endliche Bewegungen. Lie schlug daher vor, eine konsequent infinitesimalgeometrische Fassung der Bedingung freier Beweglichkeit auf der Basis seiner Theorie der Transformationsgruppen zugrunde zu legen.[99] Auf dieser Basis entwickelte Lie in der später gemeinsam mit Friedrich Engel ausgearbeiteten *Theorie der Transformationsgruppen* ein Argument, das an die Stelle des Helmholtzschen treten konnte und wiederum (für Räume der Dimensionen zwei bis vier, die transitive Transformationsgruppen mit freier Beweglichkeit im Lieschen Sinn zuließen) erlaubte, auf die Eigenschaft konstanter Krümmung zu schließen.[100]

[97] [Killing 1885a], S. 17 und öfter.
[98] Vgl. [Klein 1890] und [Killing 1891].
[99] Vgl. [Lie 1886].
[100] [Lie/Engel 1893], Abtheilung V.

Auch diese Überlegungen, aus denen sich später das sog. Helmholtz-Liesche Raumproblem entwickelte, waren Hausdorff vertraut, der in Leipzig auch bei Lie studiert und von diesem 1892 das Angebot erhalten hatte, sich an der Herausgabe von Lies Arbeiten zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu beteiligen. Auch Friedrich Engel kannte er persönlich gut.[101] Hausdorffs Kenntnis der Lieschen Fassung des Raumproblems wird nicht nur durch eine Passage in *Das Chaos in kosmischer Auslese* belegt, sondern auch durch umfangreiche Manuskripte im Nachlass aus der Zeit nach der Entstehung dieser Monographie, die das Problem der freien Beweglichkeit von Körpern behandeln.[102]

Die weitere Entwicklung von Riemanns Theorie der Mannigfaltigkeiten und insbesondere Arbeiten zur Riemannschen Metrik und zur Riemannschen Krümmung hat Hausdorff ebenfalls aufmerksam verfolgt. Eine Notiz aus seinem Nachlass belegt, dass er sich unter anderem mit Arbeiten von „Christoffel, Lipschitz, Schur, Ricci, Dedekind und Beez" sowie Kronecker und Schläfli beschäftigte.[103] So interessierte ihn etwa der von Gregorio Ricci-Curbastro eingeführte Begriff der „Klasse" einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit: „Ricci nennt eine M_n von der ‚Klasse h', wenn sie aus einem euklidischen Raume von $p = n + h$ Dimensionen ausgeschieden, resp. auf eine solche deformirbar ist". Hausdorff notierte, dass abgesehen von einigen offensichtlichen Beispielen und einigen Aussagen über Mannigfaltigkeiten der Klasse 1 hierüber noch wenig bekannt war.[104] Hausdorff griff diese Überlegungen in einer Passage seines Buches *Das Chaos in kosmischer Auslese* wieder auf.[105]

Schließlich spielte für Hausdorff neben den dargestellten Entwicklungen der neuen Zweige der Geometrie noch eine weitere neue mathematische Überlegung eine grundlegende Rolle auch für die Problematik von Zeit und Raum: die Entstehung der Cantorschen Theorie unendlicher Mengen. Diese – für Hausdorffs gesamtes Werk zentrale – mathematische Entwicklung ist an vielen Stellen der Edition bereits ausführlich kommentiert worden; verwiesen sei insbesondere auf den Apparat zu Band II. Hier genügt es deshalb, kurz an den spezifischen Ort zu erinnern, welcher der Cantorschen Mengenlehre in der erkenntniskritischen Diskussion von Zeit und Raum zukommt, die im Mittelpunkt des vorliegenden Bandes steht.

Dieser Punkt betrifft vor allem die teils impliziten, teils expliziten Annahmen über die *Stetigkeit* des Raumes und der Zeit, welche in der Literatur bis in die Zeit Hausdorffs getroffen wurden. Es sollte für Hausdorff zum wesentlichen Anliegen werden, immer wieder darauf hinzuweisen, dass solche Annahmen naiv

[101] Zur Beziehung von Hausdorff zu Lie und Engel vgl. die biographischen Angaben in HGW, Band IB, bes. S. 206-207 und 232-234.

[102] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 79; die Notizen finden sich im NL Hausdorff, Fasz. 1076, in einer von ihm mit dem Titel „Projective Geometrie. Grundlagen, Axiome. Freie Beweglichkeit" beschrifteten Mappe. Auszüge aus dieser Mappe sind hier ediert. Vgl. auch unten, Abschnitt 4.1.

[103] NL Hausdorff, Kapsel 49, Fasz. 1076, S. 52-54. Diese Notiz entstand vermutlich während der Abfassung von *Das Chaos in kosmischer Auslese*.

[104] Ebd, S. 53-53v.

[105] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 113f.

waren und *nicht* auf einer expliziten Klärung der geforderten Stetigkeitseigenschaften beruhten. Zu Recht bemerkte er am Ende des Kapitels „Vom Raume“ in *Das Chaos in kosmischer Auslese*:

> Aber die Continuität, auf physischem wie mathematischem Gebiete, ist ein schwieriges Problem, über das die Discussion noch nicht einmal recht angefangen hat – geschweige denn beendet und um Mittheilung ihrer Ergebnisse zu befragen wäre.[106]

Hausdorff bezog sich hier – wie schon an anderer Stelle seines Buches – auf die Arbeiten Georg Cantors über Punktmannigfaltigkeiten, insbesondere auf den 1877 gelungenen und 1878 veröffentlichten Nachweis, dass sich das reelle Einheitsintervall in eine eineindeutige Korrespondenz mit dem Einheitsquadrat bringen ließ, sowie die späteren Versuche Cantors, den Begriff eines linearen (Punkt-)Kontinuums von anderen, verwandten Begriffen zu unterscheiden.[107]

Diese Arbeiten Cantors stellten nicht nur den auch für die Grundlagen der Geometrie wichtigen Begriff der Dimension von Mannigfaltigkeiten in Frage, sofern deren Stetigkeitseigenschaften, wie zu dieser Zeit üblich, nicht näher definiert waren. Sie warfen auch die Frage auf, wie mit anderen Begriffen in diesem Feld umgegangen werden sollte, etwa mit dem Begriff einer (stetigen) Kurve. Dass gerade hier Überraschungen möglich waren, welche die Grenzen anschaulicher Stetigkeitsvorstellungen deutlich machten, zeigten Beispiele stetiger „Kurven“, die eine Fläche vollständig ausfüllten, welche zu Beginn der 1890er Jahre von Giuseppe Peano und David Hilbert gegeben wurden.[108] Hausdorff nahm diese Beispiele früh zur Kenntnis, und noch in seinem mengentheoretischen Hauptwerk *Grundzüge der Mengenlehre* verwies er nicht nur auf sie, sondern unterstrich in einer Fußnote auch die dadurch aufgeworfene Problematik des Kurvenbegriffs:

> Wir geben keine Definition des Begriffs Kurve; die Mengen, die herkömmlicherweise diesen Namen führen, sind von so heterogener Beschaffenheit, daß sie unter keinen vernünftigen Sammelbegriff fallen. Es wäre rationell, ebene Punktmengen jedenfalls nur dann Kurven zu nennen, wenn sie keine inneren Punkte haben; das stetige Bild einer Strecke ist dann im allgemeinen keine Kurve.[109]

Die erkenntnistheoretischen Implikationen dieser und verwandter Beispiele führte Hans Hahn später in einem Aufsatz mit dem sprechenden Titel „Die Krise der Anschauung“ aus. Wie wir noch sehen werden, hatte Hausdorff seine eigene Kritik der Anschauung zu diesem Zeitpunkt längst formuliert.[110]

---

[106] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 122.

[107] Vgl. [Cantor 1878] sowie die ab 1879 in den *Mathematischen Annalen* erschienene Serie von Arbeiten Cantors mit dem Titel *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, alle in [Cantor 1932].

[108] Vgl. [Peano 1890] und [Hilbert 1891].

[109] *Grundzüge*, S. 369. Karl Menger hat an diesem Punkt später angesetzt, vgl. 6.3.

[110] Vgl. [Hahn 1933]; zu Hausdorffs Kritik der Anschauung vgl. vor allem Abschnitte 4.2.3 und 4.4.1.

Während Cantor und die an ihn anknüpfenden Autoren ihre Überlegungen im Rahmen der mathematischen Analysis entwickelten, war einer der wenigen Autoren, die sich unabhängig hiervon bereits früh – wenn auch wesentlich weniger weitgehend als durch Cantors Arbeiten nahegelegt – Gedanken zu den Stetigkeitsannahmen von Zeit und Raum machten, der oben bereits erwähnte William Kingdon Clifford. In seinem 1870 gehaltenen Vortrag „On the physical theory of forces“ diskutierte er die Frage, ob die in der mathematischen Physik übliche Beschreibung von Bewegungen durch kontinuierliche Raum- und Zeitvariablen zwingend war, oder ob für Zeit und Raum nicht auch sehr schnell verlaufende bzw. dicht verteilte, gleichwohl diskrete Punktreihen bzw. Punktmengen ausreichen könnten.[111] Clifford verband hiermit auch erkenntnistheoretische Überlegungen, auf die ich unten zurückkomme.[112]

2.3.3 Physikhistorischer Hintergrund

In vielen seiner erkenntniskritischen Schriften und Überlegungen nahm Hausdorff die mechanische Naturerklärung seiner Zeit zum Maßstab einer ebenso erfolgreichen wie grundlegenden Naturwissenschaft. In der Regel bezeichnete er die mechanische Naturerklärung dabei als (wissenschaftlichen) „Materialismus“.[113] Hausdorff hatte die mechanisch verfahrende Physik und Himmelsmechanik in seinem Studium in Leipzig, Freiburg und Berlin kennengelernt; namentlich Astronomie und Optik nahm er dann im Rahmen seiner Promotion und Habilitation sehr genau zur Kenntnis.[114]

Wichtiger Bezugspunkt der damals üblichen physikalischen Vorstellungen war das vor allem von Pierre Simon de Laplace zu Beginn des 19. Jahrhunderts geprägte Bild einer materiellen Welt, die aus kleinsten materiellen Teilchen – bisweilen als „materielle Punkte“, bisweilen als „Atome“ bezeichnet – bestand, zwischen denen Kräfte wie die Gravitationskraft, elektrische und magnetische Kräfte und ggf. auch elastische Kräfte wirkten. Kannte man die Gesetze dieser Kräfte, so konnte die Bewegung der Teilchen mathematisch berechnet werden. Dies jedenfalls war die Hoffnung des Laplaceschen Programms.[115] Laplace verband damit die Vorstellung eines kausalen Determinismus des physikalischen Geschehens, der auch die Diskussionen zu Hausdorffs Studienzeit noch stark prägte. Am Beginn seines erstmals 1814 gedruckten *Essai philosophique sur les probabilités* gab Laplace dieser Vorstellung eine später oft zitierte Fassung:

> Wir müssen daher den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines vorigen Zustandes und die Ursache des nachfolgenden ansehen. Gäbe es einen Verstand, der für einen gegebenen Augenblick alle die

[111] Vgl. [Clifford 1879], Bd. 1, S. 109-123.
[112] Vgl. Abschnitte 2.3.3 und 2.3.6.
[113] Die früheste Passage, in welcher Hausdorff – unter seinem Pseudonym Mongré – diesen Referenzrahmen ausführlich beschrieb und heranzog, war seine Kritik an Nietzsches vermeintlichem Beweis der Lehre von der „Wiederkehr des Gleichen“. Vgl. *Sant' Ilario*, Aphorismus 406; Näheres hierzu in Abschnitt 3.1.2.
[114] Näheres hierüber findet sich in HGW, Band IB, Kap. 3.
[115] Vgl. die noch immer hilfreiche Darstellung in [Fox 1974].

> Natur belebenden Kräfte und die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Wesen kennte und zugleich umfassend genug wäre, diese Data der Analysis zu unterwerfen, so würde ein solcher die Bewegungen der größten Weltkörper und des kleinsten Atoms durch eine und dieselbe Formel ausdrücken; für ihn wäre nichts ungewiß; vor seinen Augen stünden Zukunft und Vergangenheit.[116]

Diese Vorstellung war allerdings mathematisch nicht präzise, da sie unerwähnt ließ, dass neben der Lage der materiellen Teilchen auch deren Geschwindigkeiten bekannt sein mussten, um auf der Basis der damaligen mechanischen und physikalischen Theorien eine Lösung der physikalischen Grundgleichungen – die mathematisch Differentialgleichungen zweiter Ordnung waren – zu erlauben. Spätere Autoren, auf die Hausdorff sich bezogen hat, führten dies in ihren Lehrbüchern der Mechanik genauer aus. So etwa Rudolf Kirchhoff in seiner *Mechanik* von 1876 oder Heinrich Hertz in seinen posthum 1894 gedruckten *Prinzipien der Mechanik*, in welcher Hertz wie folgt definierte:

> Die augenblickliche Bewegungsart eines Systems heißt die Geschwindigkeit eines Systems. Die Geschwindigkeit ist bestimmt durch die Änderung, welche die Lage des Systems in einer unendlich kleinen Zeit erleidet und durch diese Zeit selbst. Sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen. Lage und Geschwindigkeit eines Systems zusammen nennen wir den Zustand des Systems.[117]

Dadurch wurde die Frage der kausalen Determiniertheit des materiellen Geschehens nicht nur mit der Frage nach den bestimmenden Kraftgesetzen, sondern auch mit den Konzepten der Zeit und des Raumes eng verbunden. In seinem bereits im vorigen Abschnitt erwähnten Aufsatz „On theories of physical forces“ hatte Clifford neben der Möglichkeit einer diskreten Zeit bzw. diskret verlaufender Bewegungen auch die Abhängigkeit des Laplaceschen Determinismus von Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitsannahmen für Zeit, Raum und Bewegung physikalischer Systeme diskutiert. Dass Hausdorff sich für die Problematik dieser Zusammenhänge interessierte, belegt vor allem ein im vorliegenden Band ediertes Nachlassfragment, in dem er mit Bezug auf Cliffords Diskussion die Willkürlichkeit des mechanischen Zustandsbegriffs betonte und auf die Notwendigkeit verwies, mathematische Annahmen über die Natur und Dynamik der Zustände in dieser Weltauffassung nicht als ungeprüfte metaphysische Annahmen durchgehen zu lassen.[118]

Noch ein zweites Motiv der Laplaceschen Physik sollte in den Diskussionen von Raum und Zeit im späten 19. Jahrhundert, auf die Hausdorff sich bezog, eine wichtige Rolle spielen. Es betraf den Zusammenhang von Raumgeometrie

[116] Ich folge der zeitgenössischen deutschen Übersetzung [Laplace 1819], S. 3 f.

[117] [Hertz 1894], S. 144. Dass Hausdorff die Kirchhoffs *Mechanik* [Kirchhoff 1876] kannte, belegt u.a. eine frühe Ausarbeitung Hausdorffs zur Hydrodynamik, NL Hausdorff, Fasz. 1070; auf [Hertz 1894] nahm Hausdorff u.a. in einer Passage von *Das Chaos in kosmischer Auslese* sowie in seiner Vorlesung *Zeit und Raum* Bezug.

[118] NL Hausdorff, Fasz. 1078, Blatt 11.

und Gravitationskraft. In einer späteren Auflage seiner vielgelesenen *Exposition du système du monde* wies Laplace auf eine bemerkenswerte Eigenschaft des Newtonschen Gravitationsgesetzes hin: dieses war in folgendem Sinn invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen des (in traditioneller Weise als euklidisch verstandenen) dreidimensionalen Raumes:

> La loi de l'attraction réciproque au carré de la distance est celle des émanations qui partent d'un centre. Elle paraît être la loi de toutes les forces dont l'action se fait apercevoir à des distances sensibles, comme on l'a reconnu dans les forces électriques et magnétiques. Ainsi cette loi, répondant exactement à tous les phénomènes, doit être regardée, par sa simplicité et par sa généralité, comme rigoureuse. Une de ses propriétés remarquables est que si les dimensions de tous les corps de l'univers, leurs distances mutuelles et leurs vitesses venaient à croître ou à diminuer proportionnellement, ils décriraient des courbes entièrement semblables à celles qu'ils décrivent; en sorte que l'univers, réduit ainsi successivement jusqu'au plus petit espace imaginable, offrirait toujours les mêmes apparences aux observateurs.[119]

In einer Anmerkung wies Laplace darauf hin, dass sich damit möglicherweise sogar ein physikalisches Argument zugunsten des berühmten Parallelenpostulats in der Geometrie Euklids entwickeln ließ, wenn nämlich die Existenz solcher Ähnlichkeitstransformationen für den Raum *gefordert* wurde.[120] Wie wir noch sehen werden, wurde dieses Argument im 19. Jahrhundert mehrfach aufgegriffen, und es sollte in den späteren Debatten um die nichteuklidische Geometrie eine wichtige Rolle spielen, etwa in Arbeiten von Hermann v. Helmholtz, Otto Liebmann und Joseph Delbœuf, die Hausdorff alle rezipiert hat.

Mit der allmählichen Durchsetzung der nichteuklidischen Geometrien suchten freilich einige Mathematiker auch die Möglichkeit einer Mechanik in nichteuklidischen Räumen zu entfalten, indem eine geeignete (z.B. variationstheoretische) Fassung der mechanischen Prinzipien zum Ausgangspunkt gewählt wurde, die sich auf Räume konstanter Krümmung übertragen ließ. Eine zusammenfassende Untersuchung zu diesem Thema legte wiederum Wilhelm Killing während seiner Arbeiten an den nichteuklidischen Raumformen vor; er berief sich dabei auf Vorarbeiten u.a. von Rudolf Lipschitz und Ernst Schering.[121]

Auch William Kingdon Clifford war sich dieser Möglichkeiten bewusst. Von ihm liegen u.a. Andeutungen zu einer Mechanik im dreidimensionalen elliptischen Raum vor. Noch weiter ging Clifford in der Verknüpfung von Physik und Geometrie des Raumes jedoch in einer kurzen spekulativen Bemerkung zu einer „Space Theory of Matter", die an knappe Andeutungen anschloss, welche Bernhard Riemann in seinem Habilitationsvortrag zum Zusammenhang von

[119] Ich folge der 5. Auflage, [Laplace 1824], S. 385.
[120] Ebd., S. 386.
[121] Vgl. [Killing 1885b], [Lipschitz 1872], [Lipschitz 1873]. Scherings Arbeiten von 1870 und 1873 sind wiederabgedruckt in [Schering 1902], S. 155-162 und S. 177-184. Später hat auch der mit Hausdorff gut bekannte Heinrich Liebmann zu diesen Fragen beigetragen, vgl. [Liebmann 1902] und [Liebmann 1903]. Eine umfassende historische Untersuchung dieser Versuche liegt noch nicht vor.

Geometrie und Materie gemacht hatte. Die publizierte Fassung von Cliffords Bemerkung ist kurz genug, um sie hier vollständig wiederzugeben:

> Riemann has shewn that as there are different kinds of lines and surfaces, so there are different kinds of space of three dimensions; and that we can only find out by experience to which of these kinds the space in which we live belongs. In particular, the axioms of plane geometry are true within the limits of experiment on the surface of a sheet of paper, and yet we know that the sheet is really covered with a number of small ridges and furrows, upon which (the total curvature not being zero) these axioms are not true. Similarly, he says, although the axioms of solid geometry are true within the limits of experiment for finite portions of our space, yet we have no reason to conclude that they are true for very small portions; and if any help can be got thereby for the explanation of physical phenomena, we may have reason to conclude that they are not true for very small portions of space.
>
> I wish here to indicate a manner in which these speculations may be applied to the investigation of physical phenomena. I hold in fact
>
> (1) That small portions of space are in fact of a nature analogous to little hills on a surface which is on the average flat; namely, that the ordinary laws of geometry are not valid in them.
>
> (2) That this property of being curved or distorted is continually being passed on from one portion of space to another after the manner of a wave.
>
> (3) That this variation of the curvature of space is what really happens in that phenomenon which we call the motion of matter, whether ponderable or etherial.
>
> (4) That in the physical world nothing else takes place but this variation, subject (possibly) to the law of continuity.
>
> I am endeavouring in a general way to explain the laws of double refraction on this hypothesis, but have not yet arrived at any results sufficiently decisive to be communicated.[122]

Eine undatierte, vermutlich um 1903 entstandene Notiz im Nachlass zeigt, dass Hausdorff sich dieser imaginativen Möglichkeit bewusst war; auch seine Leipziger Antrittsvorlesung von 1903 griff die Bemerkung Cliffords auf.

> Riemanns Idee (von Clifford zur physikal. Behandlung vorgeschlagen), dass in den ∞ kleinen Raumtheilen das Krümmungsmass nicht constant sei. Die endlichen Raumtheile geben const. K, sozusagen als statistische Mittelwerthe, wie die Gastheorie const. Druck oder const. Temperatur definirt: im ∞ Kleinen verliert das seinen Sinn. Nach Clifford pflanzen sich die Werthe des Krümmungsmasses wellenartig fort, und das giebt Bewegung der Materie.[123]

[122] [Clifford 1876].

[123] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 2. Die Notizstammt wohl aus der Zeit der Vorbereitung der Antrittsvorlesung, die eine sehr ähnliche Passage enthält, vgl. *Das Raumproblem*, S. 11. Clifford spricht in [Clifford 1876] zwar von Mittelwerten der Krümmung, der Vergleich mit der statistischen Physik findet sich bei Clifford jedoch noch nicht.

Hausdorffs Schriften und sein Nachlass zeigen, dass er die weiteren Entwicklungen der Physik seiner Zeit sehr aufmerksam verfolgte, insbesondere dann, wenn sie Themen betrafen, die auch erkenntnistheoretische Fragen wie die Relativität der Bewegung, die Grundlagen der Mechanik, die Struktur der Materie oder die Kosmologie betrafen. So rezipierte er unter anderem die wiederaufflammenden Diskussionen der Mechanik um absolute und relative Bewegungen[124], die Thermodynamik und die (im eben zitierten Fragment bereits anklingende) kinetische Gastheorie James Clerk Maxwells und Ludwig Boltzmanns, sowie die Energetik Wilhelm Ostwalds.[125]

Dies im Einzelnen aufzuschlüsseln bleibt künftiger Forschung überlassen. Wie für die Mathematik, so gilt auch für die Physik seiner Zeit, dass Hausdorffs Interesse sich vor allem auf jene experimentellen und theoretischen Entwicklungen richtete, in welchen sich neue Gedanken und neue Möglichkeiten der Naturbeschreibung ankündigten. Vor allem für Alternativen zu den hergebrachten naturwissenschaftlichen Lehrgebäuden war er stets offen.

2.3.4 Neukantianismus

In den vorangehenden Abschnitten haben wir einige der naturwissenschaftlich und mathematisch geprägten Diskussionen des 19. Jahrhunderts verfolgt, welche die Diskussionslage um die Vorstellungen von Zeit und Raum maßgeblich veränderten und denen sich Hausdorff besonders verbunden fühlte. In den folgenden Abschnitten sei ein knapper Abriss der philosophischen Strömungen ergänzt, mit denen Hausdorff sich in seinen Schriften über Zeit und Raum besonders auseinandergesetzt hat, teils in kritischem Anschluss, teils in entschiedener Ablehnung.

Ich beginne mit einem Blick auf den Neukantianismus, den Hausdorff während seines 1887 begonnenen Studiums in Leipzig, Freiburg und Berlin, und dort unter anderem bei Friedrich Paulsen kennengelernt hat.[126] Zu dieser Zeit stand der philosophische Hochschulunterricht an vielen Orten des deutschsprachigen Raumes stark unter dem Vorzeichen der Auseinandersetzung mit Kants Lehren. Neben den insgesamt dominierenden Vertretern einer neukantianischen Philosophie waren jedoch auch einige bedeutende Gegenpositionen zu finden.[127] Aber auch die neukantianische Bewegung selbst war in den hier interessierenden Punkten alles andere als einheitlich. Einige ihrer Vertreter suchten die Philosophie Kants vor den in den vorigen Abschnitten dargestellten Tendenzen einer naturwissenschaftlich begründeten Relativierung abzusichern, indem

[124] Vgl. [Neumann 1870], von Hausdorff aufgegriffen u.a. in *Das Raumproblem*, Anm. 19.

[125] Einschlägige, wenn auch oft implizite Bezugnahmen auf diese physikalischen Theorien finden sich besonders in den Schlusskapiteln von *Das Chaos in kosmischer Auslese*. In den von Ostwald herausgegebenen *Annalen der Naturphilosophie* hat Hausdorff später seine Antrittsvorlesung publiziert, vgl. dazu Abschnitte 4.3 und 4.4.

[126] Vgl. Abschnitt 3.1.1. Eine ausführliche Schilderung der Studienzeit Hausdorffs findet sich in HGW, Band IB, Kap. 3.

[127] Zur Geschichte des Neukantianismus vgl. [Köhnke 1986], der zu den hier behandelten Themen Zeit und Raum allerdings nicht allzu viel Auskunft gibt, sowie [Beiser 2015].

sie auf einer strengen Auslegung seiner Transzendentalphilosophie bestanden; für den deutschsprachigen Raum ist dabei insbesondere auf den von Hermann Cohen begründeten Marburger Neukantianismus hinzuweisen.[128] Andere wiederum suchten die von Autoren wie Helmholtz und Baer sowie die von Mathematikern wie Riemann oder Clifford vorgebrachten Argumente zu integrieren, um so eine den Naturwissenschaften gegenüber offenere und für diese interessantere Form der Erneuerung der Philosophie Kants zu Wege zu bringen. Es überrascht nicht, dass Hausdorff vor allem an dieser zweiten Variante eines Anschlusses an Kant interessiert war.

Geht man von Hausdorffs – oder vielmehr Mongrés – Schriften aus, so bildete insbesondere das Hauptwerk von Otto Liebmann mit dem Titel *Die Analysis der Wirklichkeit* einen maßgeblichen Anknüpfungspunkt in dieser zweiten Linie des Neukantianismus. Ihr hat Hausdorff etliche Stichworte für die Ausarbeitung seiner eigenen Erkenntniskritik entnommen. Liebmann, der in Jena, Leipzig und Halle studiert und promoviert hatte, 1864 in Tübingen habilitierte und 1882 als Professor nach Jena zurückkehrte, war durch seine 1865 gedruckte Schrift *Zurück zu Kant*, die mit der Losung „Es muss zu Kant zurückgegangen werden" schloss, einer der Impulsgeber der neukantianischen Bewegung.[129] Otto Liebmanns 1874 geborener Sohn Heinrich wurde Mathematiker in Leipzig, wo er sich ab der Mitte der 1890er Jahre vor allem dem Gebiet der nichteuklidischen Geometrie zuwandte; der sechs Jahre ältere Hausdorff war zu dieser Zeit mit ihm bekannt.[130]

In der zuerst 1876 erschienenen und mehrfach wiederaufgelegten Schrift *Die Analysis der Wirklichkeit* setzte sich Liebmann für eine undogmatische, für die Naturwissenschaften und die Mathematik offene Variante des Kantianismus ein, die dessen potentiellen Erkenntnisrelativismus unterstrich.[131] Sein Ziel war – durchaus verwandt zu seinem früheren Essay – eine kritische Durchmusterung der zeitgenössischen philosophischen Grundfragen und Strömungen mit dem Ziel, eine „Erkenntniskritik oder Transcendentalphilosophie" zu formulieren, die alle auch in Kant noch enthaltenen dogmatischen Anteile abstreifte und sich jeder Tendenz enthielt, ein philosophisches System auszuarbeiten.[132]

[128] Im französischsprachigen Raum wurde eine strenge Form des Kantianismus u.a. von Charles Renouvier verteidigt; Näheres hierzu in Abschnitt 2.3.7.

[129] Zu Liebmanns Rolle für den Neukantianismus vgl. [Beiser 2015], Kap. 7. Beisers Ausführungen zu Liebmanns Kritik von Zeit und Raum bleiben allerdings oberflächlich.

[130] Vgl. Abschnitt 4.2.

[131] Eine zweite Auflage von Liebmanns *Analysis* erschien 1880, im Jahr 1900 folgte die dritte und 1911 die vierte Auflage. Hausdorff zitiert in *Das Chaos in kosmischer Auslese* aus der ersten Auflage, der wir ebenfalls folgen, sofern nichts anderes angegeben ist.

[132] So ist der erste Teil des Liebmannschen Werkes überschrieben. Der zweite Teil galt der „Naturwissenschaft und Psychologie", der dritte Teil der „Aesthetik und Ethik". Vor allem der zweite Teil des Werkes positionierte sich offen gegen die im deutschen philosophischen Leben der Zeit verbreitete Verachtung der mathematischen und empirischen Wissenschaften, vgl. insbesondere die Kapitel „Über den philosophischen Wert der mathematischen Naturwissenschaft" und „Gehirn und Geist", die für eine Anerkennung der Newtonschen Physik und des „psychologischen Materialismus" (*Analysis*, S. 497) plädierten.

Bereits in den „Prolegomena“ des Buches griff Liebmann mit Blick auf die vielfältigen Erscheinungen der Natur das Motiv der naturalisierenden Tendenz in der Rezeption der Kantschen Transzendentalphilosophie auf:

> In der That läßt ja der Spielraum der objectiven Möglichkeiten für ein Wesen von unserer specifischen Geistesconstitution eine subjective Mehrheit von Deutungsversuchen zu.[133]

Wie wir noch sehen werden, sollte das Stichwort des stets bestehenden „Spielraums“ möglicher Deutungen menschlicher Erfahrung in Hausdorffs eigener Erkenntniskritik eine grundlegende Rolle spielen.

Den Themen Zeit und Raum sind mehrere Kapitel von Liebmanns Buch gewidmet. Da sich Hausdorffs spätere, in ihrer methodischen Konsequenz und Radikalität deutlich weitergehende Überlegungen thematisch eng mit denen Liebmanns berühren, seien die zentralen Punkte im Folgenden kurz dargestellt.

Im ersten Kapitel seines Buches stellte Liebmann seinen Lesern mittels eines Blicks auf die neuzeitliche philosophische Tradition die „Streitfrage“ zwischen „Idealismus“ und „Realismus“ vor. Er deutete dabei an, dass er die Kantische Position eines „transzendentalen Idealismus“ für durchaus vereinbar hielt mit den Kenntnissen der „mathematischen Physik“ oder den „Reflexionen über das Verhältnis des Nervensystems und Gehirns zu dem Geistigen“.[134] Das Kapitel endete mit dem Vorschlag eines unausführbaren Gedankenexperiments:

> Wir suchen nach der Entscheidung der Streitfrage. Der directe, leider jedoch unzugängliche Weg bestünde in der Ausführung des übermenschlichen Experiments: Hebe jedes Bewußtsein auf, zunächst jedes dir gleichartige Bewusstsein; – was bleibt dann übrig von der uns bekannten Welt? Alles? Oder Etwas? Oder Nichts? – Der hierbei eintretende Defect würde eben das „Ideale“ sein, der übrig bleibende Rest das „Reale“.[135]

Im zweiten Kapitel „Über die Phänomenalität des Raumes“ wandte Liebmann sich dann einer Diskussion des philosophischen „locus communis“ zu, der besagt: „Die empirische Welt ist nur ein Phänomen.“[136] Er stellte diese These in den Kontext der physiologischen Wahrnehmungstheorien der Zeit, insbesondere von Johannes Müllers Lehre von den spezifischen Sinnesenergien: Hörnerven liefern uns akustische Reize, Sehnerven liefern uns optische Reize, unabhängig davon, was diese Nerven reizt. Auch er betonte im Anschluss an Helmholtz' Ausführungen, dass mithin derselbe äußere Reiz verschiedene Sinnesempfindungen hervorrufen und umgekehrt dieselbe Sinnesempfindung von ganz verschiedenen äußeren Reizen hervorgerufen werden konnte. Sinnesempfindungen waren daher „nicht Bilder, sondern Symbole für die Gegenstände und Processe der Außenwelt“.[137] In einer bemerkenswerten Umkehrung der historischen

[133] *Analysis*, S. 3.
[134] Ebd., S. 32.
[135] Ebd., S. 35.
[136] Ebd., S. 36.
[137] Ebd., S. 43.

Abfolge führt Liebmann im Anschluss aus, die philosophische Reflexion Berkeleys und Kants sei hierüber hinaus gegangen, indem sie auch die „Realität des Raumes selbst“ bestritten und den empirisch-realen Raum „zu einem bloßen Phänomen herab“ gesetzt habe, freilich in Kants Lehre von der transzendentalen Idealität des Raumes zu einem a priori gegebenen.[138] „Es ist weltbekannt,“ so Liebmann weiter, „welch' harte Nuß Kant hiermit den Metaphysikern von Profession und den Freunden des Fachs zu knacken gegeben hat. Seit neunzig Jahren knacken sie daran und werden mit dem Ding nicht fertig.“[139] Liebmann wollte insbesondere untersuchen, „ob und inwiefern von Seiten der exacten Wissenschaft die philosophische Lehre von der Phänomenalität des Raumes verificirt wird.“[140]

In weiteren Ausführungen zum Sehvorgang und den verschiedenen, u.a. von Johannes Müller, Johann Friedrich Herbart, Hermann Lotze und Albrecht Eduard Nagel vertretenen Theorien, wie es von der Sinnesreizung zur optischen Wahrnehmung kommt, konstatierte Liebmann, dass „ein Grundgedanke sämmtlichen Parteien gemeinsam“ sei:

> Jeder Sehende hat seinen eignen Anschauungsraum privatim für sich; dieser Anschauungsraum entsteht und existirt für das Subject im Acte und durch den Act des Sehens und Anschauens und ist folglich ein subjectives Phänomen im Bewusstsein des anschauenden Individuums.[141]

In Formulierungen wie diesen lag die Möglichkeit einer noch weitergehenden Relativierung der Raumwahrnehmung als Baer sie vor Augen hatte: Nicht die physiologischen Eigenschaften der biologischen Spezies, sondern möglicherweise die „Intelligenz“ und das „Bewusstsein des anschauenden Individuums“ bildeten die eigentliche Quelle der Raumvorstellung „mit der empirischen Sinnenwelt darin“.[142] Auch wenn sich Liebmann dieser Konsequenz nicht voll bewusst gewesen sein mag, da er mit Kant an eine allen Menschen gemeinsame Struktur der anschauenden Intelligenz glaubte, sollte doch Hausdorff sie später ziehen.

Von hier aus wandte sich Liebmann nun der Frage der Geometrie zu:

> Nun aber bleibt, nach Abzug alles empirisch Sinnlichen, noch die reine Raumform [...], jene pure Ausdehung nach drei Dimensionen übrig, in welche hinein unsre anschauende Intelligenz ihre empirische Erscheinungswelt construirt. Dies letzte, nur formale Raumresiduum ist nichts andres als der reine Raum der Geometrie. [...] Kommt diesem reinen Raum etwa transcendente Realität zu? Ist er etwa die Ordnung der absolut-realen Welt, welche außerhalb und jenseits unsres subjectiven Bewußtseins liegt? Oder trägt auch er nur den Charakter der Phänomenalität?[143]

---

[138] *Analysis*, S. 43.
[139] Ebd., S. 44.
[140] Ebd., S. 45.
[141] Ebd., S. 50.
[142] Ebd.
[143] Ebd., S. 53.

Es spricht für den Autor, dass er sich an dieser Stelle nicht einfach zu Kants Philosophie der Mathematik zurück wandte, sondern wiederum den Blick auf die exakten Wissenschaften richtete: „Hier greifen nun gewisse höchst subtile Speculationen der modernen Mathematik in unser Problem ein [...].“[144] Mit Bezug auf Gauß, Lobatschewski, Riemann und Helmholtz, mit welchem sich Liebmann persönlich über diese Fragen ausgetauscht hatte, führte Liebmann seinen Lesern die Problematik des Euklidischen Parallelenaxioms und die Möglichkeit der Bildung des Begriffs einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit im Sinne Riemanns vor. Dessen Krümmungsbegriff erwähnte er, seine Erläuterung blieb allerdings auf die Gaußsche Flächenkrümmung begrenzt. Sogar die „concrete Vorstellung“ konnte diesem „generellen analytischen Raumbegriff“ von Räumen höherer Dimension „einige Schritte weit folgen, wenn man außer den rein räumlichen, extensiven Größenbestimungen noch einige intensive hinzunimmt, wie z.B. Temperatur, Dichtigkeit, Helligkeit u. dgl. m.“.[145] Auch hier folgte Liebmann den früheren Texten von Helmholtz. In der 1880 erschienenen zweiten Auflage der *Analysis* fügte Liebmann an dieser Stelle eine zusätzliche Fußnote an:

> Die Unabhängigkeit dieser abstract-analytischen Speculationen von der concret-anschaulichen Natur unserer Raumform hat inzwischen auf rein mathematischem Wege G. Cantor erwiesen. Vgl. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 84, S. 242-258.[146]

In diesem 1878 erschienenen Aufsatz hatte Cantor die Möglichkeit einer eineindeutigen Abbildung des reellen Einheitsintervalls auf das Einheitsquadrat gezeigt und mithin die Problematik des mathematischen Dimensionsbegriffes unterstrichen. Falls Hausdorff bei der Abfassung von *Das Chaos in kosmischer Auslese* auch diese zweite Auflage des Liebmannschen Buches vorgelegen hat, könnte diese Fußnote ihn durchaus auf Cantors Überlegungen aufmerksam gemacht haben.[147]

Vor diesem Hintergrund des „generellen analytischen Raumbegriffs“ hielt Liebmann nun unter Verweis auf Riemann und Helmholtz etwas pleonastisch fest:

> Unser Raum ist ein ebener Raum von drei Dimensionen, in welchem die Euklidische Geometrie unter der Bedingung gilt, daß sein Krümmungsmaß überall den constanten Werth Null besitzt.“[148]

Obwohl Liebmann den Unterschied zwischen (dreidimensionalen) Räumen konstanter Krümmung und solchen variabler Krümmung aufgriff, glaubte er doch

[144] *Analysis*, S. 53.
[145] Ebd., S. 58 f.
[146] [Liebmann 1880], S. 59.
[147] Walter Purkert hat Hausdorffs erste Rezeption der Cantorschen Mengenlehre auf die Zeit der Abfassung von *Das Chaos in kosmischer Auslese* d.h. auf die Jahre 1897/1898 datiert, und die dafür herangezogenen Belege verweisen sämtlich auf eben das hier angesprochene Resultat Cantors, vgl. Purkert, „Grundzüge der Mengenlehre – Historische Einführung“, in HGW, Band II, dort S. 2-5; vgl. auch oben, Abschnitt 2.3.2.
[148] *Analysis*, S. 59.

irrtümlich, dass nur in einem dreidimensionalen Raum mit verschwindender Krümmung – einem „ebenen Raum“ – eine freie Beweglichkeit von festen Körpern möglich sei: „In einem ebenen Raum kann jede geometrische Körpergestalt ungeändert, mit sich congruent oder geometrisch identisch, überallhin transportiert gedacht werden, in einem nicht ebenen Raum ändert sie sich beim Transport, durch den Transport.“[149] Wie bei so vielen Autoren der Zeit bildete mithin der Riemannsche Krümmungsbegriff eine Grenze des Verständnisses.

Liebmann ging dann zur philosophischen Bewertung dieser mathematischen Überlegungen über. Gegen die „formal-logische Berechtigung“ von Räumen höherer Dimension oder „nicht ebenen“ Räumen hatte er nichts einzuwenden, auch wenn nach seiner Auskunft viele „ganz gescheidte Leute“ darüber anderer Ansicht waren.[150] Auch gegen die „objective, reale“ Existenz solcher Räume sprach seines Erachtens nichts. Aus „dem subjectiven, intellectuellen Unvermögen unsrer und jeder uns homogenen Intelligenz“, einen solchen Raum anzuschauen, könne nicht „die transcendente Existenzunfähigkeit eine solchen Raums“ gefolgert werden.[151] Wieder bemühte Liebmann die inzwischen geläufige Fiktion von Intelligenzen mit abweichenden Anschauungsformen:

> Da der Begriff eines Anschauungsvermögens, welches vollkommen anders geartet ist als das unsrige, keinen logischen Widerspruch involvirt, – (man denke doch z.B. an die Fechner'sche Flächenintelligenz oder an die Thiere mit Facettenaugen, in deren seltsame Weltanschauung sich Niemand hineinversetzen kann) –, so ist klar, dass die Möglichkeit von Intelligenzen, die einen uns unbegreiflichen Raum anschaun, sowie dass ein von unsrer Raumanschauung völlig verschiedener absoluter Raum realiter existiere, schlechthin offen und unbestreitbar bleibt.[152]

Eben darin liege letztlich jedoch eine Bestätigung Kants:

> Folglich berechtigt jene Allgemeinheit und Nothwendigkeit der Fundamentalwahrheiten des Euklides, auf welche Kant seine Lehre von der Apriorität der gewöhnlichen Raumanschauung gegründet hat, nur zu der problematischen Behauptung: Ein ebener Raum von drei Dimensionen scheint mit der wesentlichen Organisation unsres Anschauungsvermögens und jedes ihm homogenen solidarisch verknüpft zu sein.[153]

Auch Gauss und Helmholtz, mit welchem er sich selbst über diesen Gegenstand unterhalten habe, hätten sich insbesondere dahingehend geäußert, dass die Dreidimensionalität des Raumes als „eine specifische Eigenthümlichkeit der menschlichen Intelligenz“ betrachtet werden müsse.

Bevor Liebmann sein Kapitel schloss, ging er noch kritisch auf ein in Friedrich Überwegs *System der Logik* enthaltenes und bereits von Kant und Laplace

[149] *Analysis*, S. 57. Eine – mathematisch allerdings verworrene – Fußnote zu Liebmanns Text fordert ausdrücklich „das Nullwerden des Krümmungsmaßes“ für „ebene“ Räume.
[150] Ebd., S. 60 f.
[151] Ebd., S. 62.
[152] Ebd., S. 63.
[153] Ebd.

herangezogenes Argument zum Zusammenhang zwischem dem Newtonschen Gravitationsgesetz und der Dreidimensionalität des Raumes ein: Da die Schwerkraft sich wie das Licht nach allen Seiten gleichmäßig ausbreitet, sollten beide sich proportional zum Inhalt der Oberfläche einer Sphäre abschwächen.[154] Überweg glaubte, dass sich daraus ein Beweis für die Dreidimensionalität des Raumes ziehen ließ: In Räumen von anderer Dimension als drei könne nicht das als wahr erkannte Newtonsche Gravitationsgesetz gelten. Liebmann hielt dies für ein Scheinargument: Die Analogie mit Licht sei unzulässig, und der angegebene Zusammenhang habe mit dem (noch unbekannten) Erklärungsgrund der Gravitation nichts zu tun. In einer Fußnote hierzu beschrieb Liebmann ohne weiteren philosophischen Kommentar eine bereits in Laplaces *Exposition du système du monde* gegebene Diskussion des Zusammenhangs zwischen dem Newtonschen Gravitationsgesetz und einer räumlichen Maßstabsänderung: Bei einer Vergrößerung oder Verkleinerung des Maßstabs bleibt das Newtonsche Gravitationsgesetz unverändert.[155] Dass Hausdorff dasselbe Motiv im Raumkapitel von *Das Chaos in kosmischer Auslese* aufgegriffen und weiter entfaltet hat, wobei er ebenfalls zurückwies, hieraus metaphysische Folgerungen zu ziehen, ist ein weiteres Indiz dafür, dass er bei Abfassung seiner Monographie die Liebmannschen Ausführungen vor sich hatte.

Das Kapitel über die Phänomenalität des Raumes endete mit einer Bekräftigung der transzendentalen Idealität des Raumes:

> Jedenfalls ist die uns unbekannte absolut-reale Weltordnung eine solche, dass daraus für uns die Nöthigung entspringt, innerhalb unsres an jene Raumanschauung gebundenen Bewusstseins die empirisch-phänomenalen Dinge und Ereignisse, was ihre Größe, Gestalt, Lage, Richtung, Entfernung, Geschwindigkeit anbetrifft, gerade so anzuschauen, wie es in jeder uns homogenen Intelligenz geschieht.[156]

Ab der zweiten Auflage der *Analysis* fügte Liebmann einen neuen Essay „Raumcharakteristik und Raumdeduction“ an, der verschiedene Begründungen für die Dreidimensionalität sowie für die „Ebenheit“ des Raumes kritisch besprach. Liebmann ging hier nacheinander verschiedene Argumente von Leibniz, Kant, Schelling, Herbart und Wundt durch; keines von ihnen hielt er für zwingend. Er wiederholte seine Überzeugung, dass „Kants Kriticismus“ den richtigen Weg gewiesen habe, mit drei zutreffenden Behauptungen:

> Erstens: Die Axiome der Euklidischen Geometrie und damit der Euklidische Raum sind nicht logische Nothwendigkeiten. Zweitens: Sie sind aber für mich und jedes mir gleichartige Anschauungsvermögen unvermeidlich,

[154]Kant hatte dieses Argument in einer Anmerkung zum Lehrsatz 8 seiner *Anfangsgründe* herangezogen.

[155]*Analysis*, S. 66 f.; zu Laplace vgl. oben, Abschnitt 2.3.3.

[156]*Analysis*, S. 68. In einem kurzen Anhang zur zweiten Auflage 1880 wies Liebmann auf kritische Diskussionen seines Textes durch Friedrich Albert Lange, W. Tobias und Alexander Wießner hin, die sich alle gegen die Relevanz der nichteuklidischen Geometrie für die Philosophie des Raumes aussprachen, während wiederum Christoph Sigwart in seiner *Logik* zu ähnlichen Auffassungen gelangt sei.

> das heißt ihr Gegentheil ist, wiewohl durchaus keinen Widerspruch enthaltend, intuitiv nicht vorstellbar; sie sind reine Anschauungsnothwendigkeiten oder, was dasselbe besagt, Anschauungen a priori. Drittens: Weil durch die Organisation meines Anschauungsvermögens, aber nicht durch die Logik als nothwendig gegeben, sind sie subjectiv.[157]

Bei aller Kritik an einer metaphysischen „Raumdeduction“, und trotz seines Zugeständnisses, dass die neueren mathematischen Untersuchungen zu einer neuen, der „Metageometie“ angehörigen „Raumcharakteristik“ geführt hatten, folgte Liebmann damit nicht der früheren, von Helmholtz erläuterten Möglichkeit einer Zugänglichkeit der nichteuklidischen Raumformen für eine in einem dreidimensionalen euklidischen Raum erworbene Anschauung. Für uns Menschen, so insistierte er, bleibe es bei der Anschauungsnotwendigkeit der euklidischen Geometrie, auch wenn der Grund hierfür bislang nicht bekannt sei: „Es gibt bis auf Weiteres zwar eine Raumcharakteristik, aber keine Raumdeduction.“[158] Auf ganz ähnliche Weise hat Hausdorff später Argumente gegen vermeintliche philosophische „Raumdeductionen“ gesammelt – freilich ohne dabei eine irgendwie geartete Notwendigkeit der Anschauung noch anzuerkennen.[159]

Liebmanns Ausführungen zur Zeit folgten ähnlichen Spuren. Wiederum suchte er die transzendentale Idealität der Zeit zu bekräftigen, mit gleichzeitiger Offenheit für naturwissenschaftliche Überlegungen zur menschlichen Zeitwahrnehmung und für Spekulationen über abweichende Zeitwahrnehmungen anderer Wesen. Das erste einschlägige Kapitel seines Buches trägt den Titel „Ueber subjective, objective und absolute Zeit“; viele der darin enthaltenen Motive finden sich später auch in Hausdorffs Überlegungen wieder. Liebmann ging aus von zwei Unterscheidungen: einerseits zwischen absoluter und empirischer Zeit (dabei Newtons und Kants Unterscheidungen verbindend), sowie andererseits zwischen subjectiver (erlebter) und objectiver Zeit, welche der wissenschaftlichen Beschreibung von Naturvorgängen zugrunde liegt. Die von Newton beschriebene absolute Zeit, oder die Zeit „an sich“, war uns, wie Liebmann mit einer Verneigung vor Berkeleys entsprechender Kritik unterstrich, nicht direkt zugänglich.[160] Daher setzte seine Diskussion auf der Seite der empirischen (in der Erfahrung gegebenen) Zeit an:

> Die empirische Zeit nun, in welcher alles materielle und geistige Geschehen, der Lauf der Welt und der Lauf unserer Gedanken sich abwickelt und abspielt, erscheint uns als eine lückenlose, extensive Größe, als ein Continuum von einer Dimension, welches sich von dem Raumcontinuum nicht allein durch die Anzahl der Dimensionen, sondern auch dadurch unterscheidet, daß seine einander stetig berührenden Teile nicht zugleich dasind, sondern nacheinander, daß sie [...] aufeinander folgen.[161]

[157] [Liebmann 1880], S. 77.
[158] Ebd., S. 80 und S. 86.
[159] Vgl. unten, Abschnitte 3.4 und 4.2-4.3.
[160] *Analysis*, S. 71.
[161] Ebd., S. 72.

Ein „Sinnbild“ dieses „Continuums“ war die gerade Linie; dem „vorstellenden Subject“ war allerdings stets nur „ein Punkt oder Moment“ dieser Linie gegeben, wie Liebmann in poetischer Sprache ausführte:

> Die Zeitlinie erscheint daher gleichsam als bewegliche Tangente an unserem mit sich identisch bleibenden Ich. Durch ihren Berührungspunkt streicht sie unaufhörlich [...] in derselben Richtung von der Zukunft nach der Vergangenheit hin an dem Ich vorüber, oder, was bei der bekannten Relativität jeder empirischen Bewegung ganz Dasselbe besagt, das Ich mit seinem Jetzt bewegt sich umgekehrt in der Zeitlinie vorwärts, ohne Ruhe oder Rast, unfähig den schönen Augenblick zu fesseln, den es wehmütig dahinschwinden sieht. [...] Nur die Gegenwart, das Jetzt ist eigentlich, wird wahrgenommen; Zukunft und Vergangenheit führen ein bloßes Phantasiedasein in den Gedanken vorstellender Subjecte und würden bei etwaiger Aufhebung jeder Intelligenz völlig zu Nichts.[162]

Hausdorff sollte sich später – in sehr verwandter Sprache – auf diese Vorstellung als die „Bewegung des Gegenwartpunkts“ eines wahrnehmenden Bewusstseins beziehen.

Liebmann entfaltete seine Überlegungen weiter, indem er zwischen der „subjectiven“ und der „objectiven“ empirischen Zeit unterschied. Wichtigstes Unterscheidungskriterium war die Bestimmung der Länge von Zeitabschnitten: Wo individuelles Erleben verschiedene Dauern nahelegte, konnte der Vergleich mit regelmäßigen Naturvorgängen – vor allem mit den Bewegungen der Himmelskörper – eine „objective“ Zeitmessung ermöglichen. Freilich lagen hierin, wie Liebmann zeigen wollte, grundlegende Schwierigkeiten. So dürfe der transzendentale Idealismus der Zeit nicht missverstanden werden als Plädoyer für einen Rückgang auf die subjektive empirische Zeit:

> Apriorität, sage ich, bedeutet nicht empirische, psychologische, individuelle Subjectivität. A priori ist nichts Anderes, als das für uns und für jede uns homogene Intelligenz streng Allgemeine und Nothwendige, das Nichtanderszudenkende.[163]

Interessanter als das individuelle Erleben war jedoch, so Liebmann, der Weg der empirisch-physiologischen Forschung, die den Phänomenen und Gründen der variablen subjektiven Zeitwahrnehmung nachging und zeigen konnte, was die objektiven Bedingungen derselben waren. Liebmann verwies insbesondere auf eine an Fechners Psychophysik anknüpfende Schrift *Der Zeitsinn* des Tübinger Physiologen Karl Vierordt von 1868. Freilich blieb auch hier noch Spielraum für Variabilität, wie Liebmann nun mit ausführlicher Übernahme der in Abschnitt 2.3.1 dargestellten Fiktionen v. Baers ausführte: Verschiedene „Intelligenzen“, d.h. „specifisch verschieden organisierte Wesen“, mochten sehr unterschiedliche Zeitsinne und folglich auch unterschiedliche „Welten“ haben. Wiederum kleidete Liebmann diese Überlegung in eine poetische Sprache, die das Bild der Zeitlinie pluralisierte und die Hausdorff zweifellos Anregungen gab:

[162] *Analysis*, S. 73 f.
[163] Ebd., S. 81.

> Wer sich nun aber im Großen, Allgemeinen und allen Ernstes in den Gedanken vertieft, wie [...] in zahllosen heterogenen Intelligenzen zahllose, mit der verschiedensten Geschwindigkeit ablaufende Zeitlinien und davon abhängige, sehr heterogene Naturanschauungen oder empirische Welten nebeneinander existieren, – wer, sage ich, sich in diesen Gedankengang ernstlich vertieft, dem wird schwindeln vor dem Abgrund der Unbegreiflichkeit, in den er da hinabblickt; dann aber wird er seinen mit der Muttermilch eingesogenen naiven Glauben an die absolute Realität unsrer menschlichen Zeit und zeitlichen Sinnenwelt wanken und stürzen sehen, an dessen Stelle mit intensiver Klarheit das Bewußtsein der specifisch menschlichen, typischen Schranken unsrer Intelligenz ihm aufleuchten wird.[164]

Aber auch für die Vorstellung einer „objectiven" empirischen Zeit blieb, so Liebmann, eine grundlegende Problematik, die sich nicht leicht auflösen ließ. Eine objektive, technisch-naturwissenschaftliche Zeitmessung durch sich wiederholende Naturvorgänge kämpfte nicht nur mit dem Problem, dass alle bekannten Naturvorgänge nur annähernd regelmäßig waren. Sie involvierte auch einen „Cirkel im Princip":

> Gleiche Zeitabschnitte, so definirt man, sind die, in denen ein gleichförmig bewegter Körper gleiche Raumstrecken zurücklegt. Wann aber ist ein Körper gleichförmig bewegt? Dann, wenn er in gleichen Zeiten gleiche Raumstrecken zurücklegt.[165]

Angesichts dieses doppelt negativen Befundes musste laut Liebmann eine empirische Begründung der Newtonschen Vorstellung der absoluten Zeit aufgegeben werden. Freilich nicht die Vorstellung selbst:

> Hier kommt denn nun die theoretische Nothwendigkeit der Newtonischen „absoluten Zeit" zutage. Sie ist ein theoretischer Machtspruch, ein Postulat der mathematischen Vernunft. [...] Diese absolute Zeit bildet mit der absoluten Bewegung und dem absoluten Raum [...] eine Trias unentbehrlicher Hypothesen, theoretischer Grundideen, auf welcher das ganze, fein gegliederte Lehrgebäude der mathematischen Naturwissenschaft ruht. Hierin, aber hierin allein, liegt die Berechtigung des Begriffs jener absoluten Zeit; – in ihrer theoretischen Unentbehrlichkeit.[166]

Liebmann bewegte sich hier von einem traditionellen Kantianismus aus weit auf eine philosophische Position zu, die man schon als positivistisch bezeichnen könnte: Zeit als Grundkonzept der empirischen Naturwissenschaft ist einerseits ein Gegenstand empirischer Forschung, andererseits eine theoretische Setzung, ein „Hülfsbegriff" der mathematischen Naturwissenschaften. Er ging – hierin wieder Kant folgend – so weit, dass sich über die so postulierte absolute Zeit

> eine gewisse Anzahl von Grundsätzen formuliren [lassen], deren Wahrheit a priori einleuchtet, und welche ganz wohl unter dem Titel „Axiome der

[164] *Analysis*, S. 82.
[165] Ebd., S. 86 f.
[166] Ebd., S. 87.

> Chronometrie“ den Axiomen der Geometrie als Pendant zur Seite gestellt werden dürften.[167]

Hierzu zählte er Aussagen wie „Die Zeit ist eine extensive Größe von nur einer Dimension“, „Sie ist ein Continuum“, „gleiche Zeiträume sind die, welche von gleichen Vorgängen erfüllt werden“, „die Geschwindigkeit der Zeit ist immer ein und dieselbe“. Der später von Hausdorff unternommene Versuch, eine Axiomatik der Zeit zu liefern, kann durchaus als Bemühung gelesen werden, derartige Andeutungen auf moderner erkenntniskritischer und mathematischer Grundlage zu klären, wie wir in Abschnitt 4.3.2 sehen werden.

Den letzten Abschnitt des Kapitels widmete Liebmann der Frage, ob der absoluten Zeit „transcendente Realität“ zugeschrieben kann. Zur Diskussion dieser Frage griff er auf eine weitere Unterscheidung zurück, der sich Hausdorff später anschließen sollte:

> Nun bedenke man zunächst, dass wir nie leere, sondern stets erfüllte Zeit wahrnehmen. [...] Die bloße Zeit an sich, wenn man von allem und jedem Geschehen in ihr abstrahirt, wäre, mild ausgedrückt, eine ganz unfaßbare, förmlich geisterhafte Schattenexistenz.[168]

Um die Unterscheidung zwischen leerer und erfüllter Zeit zu erläutern, malte Liebmann die Fiktion eines stillstehenden materiellen Geschehens aus. In einer solchen Situation wäre auch keine Wahrnehmung der Zeit mehr möglich, wie er „durch das alte Volksmärchen vom Dornröschen“ illustrierte, um dann beides, stillstehendes Geschehen und Schlaf des Bewusstseins, zusammenzuführen:

> Stünde plötzlich der gesammte Weltproceß still, mit den Gestirnen zugleich die Uhr und jeder Gedankenlauf, um dann, infolge eines Zauberschlags, ebenso plötzlich genau da wieder anzuheben und fortzufahren, wo ihm Einhalt gethan ist, – so wäre inzwischen keine subjective und keine objective, d.h. astronomische, Zeit verflossen. Keine Lücke im Geschehen, keine Pause im Zeitverlauf hätte stattgefunden, – nämlich für diese bezauberte und wieder entzauberte Welt. Nur, wenn man sich einen außerhalb derselben stehenden Beobachter denkt, so würde für ihn, aber eben nur für ihn, eine Zwischenzeit bestehen.[169]

Für eine „allgegenwärtige Intelligenz“ jedoch, so setzte Liebmann fort, „würde alles Geschehen überhaupt, der Weltproceß in seiner ganzen Entwicklungsreihe, von der ungeheuren Genesis und Geschichte aller Fixsternsysteme herab bis zu dem winzigen, minutiösen Lebenslauf des Protozoons, mit einem Male offen daliegen“ und mithin der Gedanke einer „zeitlichen Succession“ bedeutungslos sein. Sowohl Liebmanns Fiktion der Zeitunterbrechung wie jene des zeitlosen Weltbeobachters sollte später für Hausdorff von Bedeutung werden, zuerst in seinem Aphorismenband *Sant' Ilario*.[170]

[167] *Analysis*, S. 87. In einer Fußnote verwies Liebmann auf Schriften von Johann Schulz und Johann Heinrich Lambert.
[168] Ebd., S. 88 f.
[169] Ebd., S. 92.
[170] Vgl. Abschnitt 3.1.2.

Die transzendente Realität oder „metaphysische Existenzform“ der Zeit blieb daher zumindest zweifelhaft:

> So bleibt also nach Abstraction von allem Geschehen als Rest unserer empirischen Zeitvorstellung zwar nichts Reales übrig, wohl aber die Idee der objektiven Möglichkeit eines Geschehens und einer Succession. [...] Diese Idee scheint mit der Organisation unsrer Intelligenz unzertrennlich und solidarisch verknüpft zu sein, ein Umstand, den man in Kantischer Terminologie als die „Apriorität der Zeit“ bezeichnen kann.[171]

Die drei folgenden Kapitel von Liebmanns *Analysis der Wirklichkeit* führten die Diskussion der mit Kants transzendentaler Ästhetik verbundenen Fragen in Richtung der mit ihnen verbundenen naturwissenschaftlichen Entwicklungen fort. Die großen sachlichen und zum Teil auch stilistischen Überschneidungen dieser Kapitel mit Hausdorffs späteren Texten legen nahe, dass dieser seine einschlägigen Überlegungen nicht zuletzt in Auseinandersetzung mit Liebmanns Werk geformt hat.

Das fünfte Kapitel wandte sich den beiden Begriffen „Absolute und relative Bewegung“ zu. Liebmann führte diese im Stil einer Dialektik ein:

> Strenge, rein mathematische Reflexion führt zu der Thesis: „Jede Bewegung ist relativ“. Auf mehr als ein Argument gestützt, fordert dagegen die Physik gebieterisch die Antithesis: „Es gibt absolute Bewegung“.[172]

Liebmanns Text argumentierte lange, auch gegen den naiven Realismus, zugunsten der Thesis, um dann mit Bezug auf das Gedankenexperiment einer rotierenden Kugel im leeren Raum im Rahmen der Newtonschen Mechanik einzugehen: Da unter den Voraussetzungen dieser physikalischen Theorie eine Abplattung der rotierenden Kugel erfolgt, erwies sich, so Liebmann, die Annahme der Existenz absoluter Bewegung – ebenso wie jene eines absoluten Raums und einer absoluten Zeit – als ein theoretisches Postulat, auf das sich die Mechanik stützen musste, und sie besaß in diesem Sinne *transzendentale* Geltung: „Wer das Trägheitsgesetz anerkennt, der gibt absolute Bewegung zu; und wer diese leugnet, stößt jenes um.“[173] Liebmann knüpfte seine diesbezüglichen Überlegungen an Carl Neumanns Leipziger Antrittsvorlesung aus dem Jahr 1870, in der ebenfalls dafür argumentiert wurde, dass man das Trägheitsgesetz nicht formulieren konnte, wenn man nicht gewisse Strukturen von Raum und Zeit auszeichnete, d.h. gewisse Koordinaten(inertial)systeme, die Neumann sich an einen fiktiven Körper α gebunden dachte.[174] Dagegen wies Liebmann konsequent die Auffassungen zurück, dass dem Begriff der absoluten Bewegung *empirische* oder auch *transzendente* Realität zukomme.

[171] *Analysis*, S. 94 f.

[172] Ebd., S. 99.

[173] Ebd., S. 120.

[174] „Man vergleiche mit dem Nächstfolgenden die außerordentlich klar gedachte Leipziger Inauguralvorlesung des vortrefflichen Mathematikers C. Neumann ‚Ueber die Principien der Galilei=Newton'schen Theorie.‘ Leipzig. 1870. Dort findet man zum Theil dasselbe dargelegt.“ *Analysis*, S. 121. Hausdorff bezog sich in *Das Chaos in kosmischer Auslese* ebenfalls auf diese Schrift, vgl. HGW, Band 7, S. 677 sowie die zu dieser Passage gegebenen Kommentare.

Das sechste Kapitel „Zur Theorie des Sehens“ belegt, dass Liebmanns Verteidigung Kants mit den sinnesphysiologischen Entwicklungen der Optik vertraut und durch sie angeregt war. Das Kapitel umfasst eine längere Auseinandersetzung mit der von Helmholtz als „nativistisch“ bezeichneten Theorie des Sehens, die unter anderen Johannes Müller, Ewald Hering und Friedrich Überweg befürwortet hatten: Räumliche Wahrnehmung war danach die durch eine angeborene Reaktion erfolgende Wahrnehmung des räumlichen Netzhautbildes, die wahrgenommene Räumlichkeit der Dinge war so determiniert durch die der Netzhautbilder. Dagegen setzte Liebmann die von Helmholtz vertretene empiristische „Projectionstheorie“: Vom Bewusstsein wahrgenommen werden die äußeren räumlichen „Projectionen“ der Netzhautbilder entlang der „Visirlinien“, die nach den Gesetzen der geometrischen Optik von der Netzhaut zu den abgebildeten Gegenständen führen.[175] Liebmann stellte sich klar auf die Seite von Helmholtz, aus dessen sinnesphysiologischen Schriften er sehr ausführlich zitierte. Er hielt die nativistische Theorie für metaphysisch, außerdem erklärte sie den Wahrnehmungsprozess nicht, da nicht notwendig war, dass die räumlichen Netzhautbilder auch räumlich wahrgenommen werden mussten. Die „Projectionstheorie“ hingegen beschrieb das räumliche Sehen als Resultat einer aktiven Leistung des wahrnehmenden Bewusstseins, was gut zu der von Liebmann vertretenen Form des transzendentalen Idealismus passte. Liebmanns Diskussion stellte viele Bezüge zur physiologisch-philosophischen Diskussion dieser Zeit her, u.a. zu Herbart und Lotze sowie zur englischen Diskussion seit Berkeley und Locke.

Von der Sinnesphysiologie leitete Liebmann im siebten Kapitel seines Werks über in die Diskussion des Begriffs der Kausalität und ihrer Beziehung zur „Zeitfolge“. Diese Wendung war wiederum durch Helmholtz angeregt, der in einer von Liebmann zitierten Passage seiner physiologischen Optik bemerkt hatte, dass – im Unterschied zu den zuvor gestreiften Fragen der Wahrnehmung räumlicher Verhältnisse – die zeitliche Abfolge von Sinnesempfindungen mit der zeitlichen Abfolge der äußeren Ereignisse übereinstimmen könne, welche diese Sinnesempfindungen auslösen.[176] Liebmann betonte, weiterhin Helmholtz zitierend, dass hierbei der zeitliche Verlauf der Wahrnehmungen „insofern kein ganz getreues Abbild der Zeitfolge der äußeren Ereignisse ist, als die Leitung von den Sinnesorganen zum Gehirn Zeit [...] kostet. Dazu kommt noch für Auge und Ohr die Zeit, welche Licht und Schall brauchen, um bis zum Organ zu gelangen.“[177] Liebmann fragte daher: „Wie ist über die hierin behauptete Objectivität der Zeitwahrnehmung zu urtheilen?“

Um seine Frage zu beantworten, traf Liebmann eine wichtige Unterscheidung zwischen der „Zeitordnung“ einerseits, der „extensiven Quantität des Zeitverlaufs“ andererseits.[178] Unter der Zeitordung verstand er:

---

[175] *Analysis*, S. 132 f.
[176] Ebd., S. 178; [Helmholtz 1867], S. 445.
[177] *Analysis*, S. 178 f.
[178] Ebd., S. 179 f.

> die Simultaneität oder Successivität, das *hysteron* oder *proteron*, die zeitliche Stelle des wahrnehmbaren Geschehens und die Größen*relation* der empirisch gegebenen Zeiträume.[179]

Demgegenüber hielt er die „extensive Quantität des (für uns) verlaufenden zeitlichen Geschehens" für eine subjektive Eigenschaft der menschlichen Intelligenz, ja er ging – auf seine frühere Diskussion der Überlegungen Baers verweisend – so weit zu behaupten, dass andere Lebewesen den Zeitverlauf anders wahrnahmen, in Formulierungen, die sich in radikalisierter Form später auch bei Hausdorff wieder finden sollten:

> Genug, wie wir gesehen haben, gibt es nicht nur möglicherweise, sondern ganz gewiß und ohne allen Zweifel ebensoviel verschiedne und incongruente Zeitlinien (wiewohl nicht Zeitordnungen) als es mit verschiedner Geschwindigkeit percipirende Intelligenzen gibt.[180]

Die Frage nach der Objektivität der Zeitwahrnehmung konnte somit nach Liebmanns Überzeugung auf die nach der Objektivität der wahrgenommenen Zeit*ordnung* reduziert werden. Die Zeitordnung durfte, so Liebmann, in der Tat Objektivität beanspruchen und stand in Beziehung zur Kausalstruktur des wirklichen Geschehens. Die „prägnanteste, inhaltsvollste, kosmologische Formel" des „Causalprincip[s]" oder des „Princip[s] der ausnahmslosen Gesetzlichkeit alles Geschehens" war, wie Liebmann – in für zeitgenössische Leser sicher offenkundiger Anspielung auf den von Laplace beschriebenen Determinismus – formulierte:

> Aus dem gegenwärtigen Zustande des Universums geht unausbleiblich und mit Nothwendigkeit der unmittelbar darauf folgende Weltzustand hervor, aus diesem der übernächste, und so vorwärts und rückwärts in der Zeit in infinitum. Jeder Weltzustand ist immer die empirische Totalursache des nächstfolgenden und Totalwirkung des nächstvorangegangenen. [...] das Band der Nothwendigkeit, wodurch die Reihenfolge der Weltzustände grade in dieser und in keiner andren Ordnung verknüpft wird, besteht in dem System der Naturgesetze [...].[181]

Mithin scheine die grundlegende Ordnungsrelation der Zeit, das „Früher" und „Später", mit dem Kausalprinzip eng verknüpft, und man müsse

> eine durchgängige Correspondenz zwischen der Ordnung desjenigen Unbekannten, was uns zu einem Nacheinander von Sinnesempfindungen nöthigt, und diesem bekannten Empfindungs-Nacheinander selbst annehmen [...].[182]

In einer weit ausgreifenden, auf Spinoza verweisenden Reflexion verneinte Liebmann freilich die kritische Frage, ob die hiermit angedeutete naturgesetzliche

[179] *Analysis*, S. 179 f.
[180] Ebd., S. 181.
[181] [Ebd., S. 170 f. Zu Laplace vgl. oben, Abschnitt 2.3.3.
[182] Ebd., S. 180.

Ordnung der Ereignisse auch die transzendente Realität der Zeit selbst zur Folge hatte. Denn die „Ordnung desjenigen Unbekannten, was uns zu einem Nacheinander von Sinnesempfindungen nöthigt," brauchte selbst nicht von zeitlicher Natur zu sein. Es war eine „logisch statthafte" Hypothese, eine „zeitlose, absloute Intelligenz" anzunehmen, die nicht wie Menschen oder Tiere auf eine (subjektiv je verschiedene) zeitliche Wahrnehmung von Ereignisverläufen angewiesen war.[183] Für eine solche Intelligenz bestand die gesetzliche Ordnung von Ursache und Wirkung in einer „Logik der Thatsachen", die ebenso zeitlos war wie ein Euklidischer Syllogismus:

> Jeder empirische Vorgang in der Zeit, jedes beliebige Naturereigniß, sei es ein Meteorsteinfall oder eine Denkbewegung im Menschenhirn, stellt sich nämlich ganz ungezwungen dar als ein logischer Schluß, worin das Naturgesetz die propositio major bildet, der gegenwärtige Zustand des Objects die pr. minor, woraus als Conclusion der nächstfolgende Zustand des Objects hervorgeht.[184]

Diese „Logik der Thatsachen" könnte auch der angenommenen absoluten Intelligenz bewusst sein. Für sie würde

> wirklich der ganze, für uns im unendlichen Raum verzettelte und in der unendlichen Zeit distrahirte, Weltproceß bis in seine minutiösesten Einzelheiten hinein als zeitlose Weltlogik sub specie aeternitatis gegeben sein. Dies wäre dann die vollendete Logik der Thatsachen in der objectiven Weltvernunft; und Spinoza hätte Recht in einem Sinne, der ihm freilich nicht vollkommen klar sein konnte, weil er ein Jahrzehend von der Publikation von Newtons Principia und ein Jahrhundert vor der Herausgabe von Laplace's Mécanique céleste gestorben ist.[185]

Die Verknüpfung des Problems der Zeit mit allgemeinen Frage der gesetzlichen Ordnung der Natur beschäftigte Liebmann wiederholt. Dabei war er fest davon überzeugt, dass eine „Gesetzlichkeit im Gang der Ereignisse" unbedingt angenommen werden musste. Auch in der Begründung dieser Haltung griff er auf die farbenreiche und imaginative Sprache zurück, die seine Ausführungen vielfach charakterisierte:

> Wäre sie nicht vorhanden, ließe etwa ein absoluter Zufall den zeitlichen Strom der Begebenheiten in lauter nur einmalige, nie sich wiederholende Zustandsfolgen regellos auseinanderfallen, dann würde offenbar nicht allein unsere nach Erkenntniß strebende Intelligenz diesem unverständlichen Weltlauf völlig rathlos gegenüberstehen. – Nein! Wir selbst wären in diesem Fall gar nicht lebensfähig; die Möglichkeit zu jeder Erfahrung, Uebung, Gewohnheit und Fertigkeit wäre durchaus abgeschnitten; wir wären dem Verderben und Untergang rettungslos preisgegeben; wir würden verschlungen von einem vernunftlos wirbelnden Chaos und lebten

[183] *Analysis*, S. 184.
[184] Ebd., S. 186 f.
[185] Ebd., S. 188.

> und webten nicht in einem geordneten Kosmos. Die allgemeine Gesetzlichkeit des natürlichen Geschehens ist das objective Correlatum Desjenigen in uns, was wir Vernunft, *logos* nennen; sie ist die Logik der Thatsachen, die Vernunft im Universum. Die Ueberzeugung aber, daß diese Gesetzlichkeit eine wirklich strenge, durchgängige, absolut allgemeine sei, d.h. sich über alle Zeiten, Räume und Ereignißklassen erstrecke, – diese Ueberzeugung kann kein Empeirem sein.[186]

⋆

Liebmanns Variante eines für die zeitgenössischen Naturwissenschaften offenen und die relativierenden Herausforderungen der Sinnesphysiologie ebenso wie der nichteuklidischen Geometrie ernst nehmenden Kantianismus bot für Hausdorff viele Anknüpfungspunkte. Wie wir im dritten Abschnitt dieser Einführung sehen werden, griff er nahezu alle dargestellten Elemente der Liebmannschen *Analysis der Wirklichkeit* wieder auf, um sie einer weiter gehenden und wesentlich radikaleren Kritik zu unterwerfen. Auch den bilderreichen literarischen Stil Liebmanns finden wir in den unter dem Pseudonym Paul Mongré veröffentlichten Texten Hausdorffs wieder – bis hin zu dem zuletzt zitierten Motiv einer Unterscheidung zwischen „einem vernunftlos wirbelnden Chaos“ und einem subjektiv erlebten „geordneten Kosmos“, das Mongré später zum Leitmotiv seiner Schriften machte, wenn auch in einer erkenntniskritischen Absicht, die sich von der Liebmanns deutlich unterschied.

Die naturwissenschaftlichen Zeugen Liebmanns wiederum – von Johannes Müller und Karl Ernst v. Baer über Hermann v. Helmholtz bis zu Bernhard Riemann und Georg Cantor – wurden auch Zeugen Hausdorffs. Verwandt mit Liebmann, aber entschieden moderner als bei diesem, war freilich sein Rückgriff auf die Mathematik.

2.3.5 Neue Metaphysik und Metaphysikkritik

Neben der an Kant anschließenden Erkenntniskritik – und meist gegen sie – formierte sich im Laufe des 19. Jahrhunderts auch eine philosophische Bewegung, welche der von Kant kritisierten metaphysischen „Erkenntnis“ zu neuem Leben verhelfen wollte. Angesichts dessen, dass Hausdorff sich in seinen erkenntniskritischen Schriften wiederholt und ausdrücklich „Gegen die Metaphysik“ aussprach (so der Titel des dritten Kapitels von *Das Chaos in kosmischer Auslese*) folgt hier ein kurzer Abriß der wichtigsten metaphysischen Positionen des 19. Jahrhunderts, mit denen sich Hausdorffs Texte zu Zeit und Raum auseinandersetzten.

Dabei muss zunächst daran erinnert werden, dass eine neue „Grundlegung der Metaphysik“ auch ein Anliegen von Kant selbst gewesen war, namentlich im Bereich der praktischen Vernunft. Wie wir bereits gesehen haben, suchte er freilich auch *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaften* zu legen.

[186] *Analysis*, S. 264 f.

Daher konnten auch die Befürworter einer neuen Metaphysik im 19. Jahrhundert sich immer wieder auf Kant beziehen, wobei sie freilich nicht müde wurden zu betonen, dass Kant in dieser Richtung nicht weit genug gegangen sei.

In den Worten des Göttinger Philosophen Hermann Lotze, der im Laufe seiner Karriere mehrere Bücher unter den Titel *Metaphysik* stellte, war die Aufgabe derselben eine über die subjektive Wahrnehmung, Empfindung und Erfahrung hinausreichende Erkenntnis des „Wesens der Dinge“ und der allgemeinen „Gesetzlichkeit im Lauf der Dinge“, eine

> Zusammenfassung dessen [...], was wir unabhängig von der Erfahrung [...] über Natur und Zusammenhang des Wirklichen glauben behaupten zu müssen.[187]

Es war Lotze und anderen zeitgenössischen Metaphysikern durchaus klar, dass ihr Erkenntnisanspruch mit den Naturwissenschaften und der Mathematik ihrer Gegenwart konkurrierte. Freilich waren verschiedene Formen eines Arrangements denkbar, die von der Unterordnung der Einzelwissenschaften unter die Philosophie bis hin zu einer mehr oder weniger expliziten Aufgabenteilung reichten, welche beiden Seiten ihre Unabhängigkeit lassen und die Metaphysik eher der (schönen oder moralischen) Literatur als der Wissenschaft angleichen wollten. Vor allem Arthur Schopenhauer und Friedrich Nietzsche können in diesem Licht gesehen werden. Mit Blick auf Nietzsches Lehre von der „ewigen Wiederkunft des Gleichen“ (auf die wir unten zurückkommen) kommentierte Mongré derartige Arrangements ironisch:

> Man sieht, derartige Erwägungen geben sich doch nicht rein als Poesie, wenn auch nicht rein als Wissenschaft oder als Norm des menschlichen Handelns; am stärksten werden sie auf diejenige Weltbetrachtung abfärben, die von allen Dreien etwas sein will, auf die Metaphysik.[188]

Beschränken wir uns auf die Frage einer Kenntnis a priori des Wesens von Zeit und Raum und auf die damit verbundene Frage, welcher Status der Geometrie von den Vertretern metaphysischer Positionen zugesprochen wurde, so sollte zunächst auf die Überlegungen Arthur Schopenhauers hingewiesen werden, den auch Hausdorff oft als charakteristischen Vertreter der Metaphysik betrachtete.

In seiner Schrift *Die Welt als Wille und Vorstellung* hatte Schopenhauer sich enthusiastisch über Kants transzendentale Analytik der Anschauungsformen Zeit und Raum geäußert:

> Ihre Beweise haben so volle Ueberzeugungskraft, daß ich die Lehrsätze derselben den unumstößlichen Wahrheiten beizähle, wie sie ohne Zweifel auch zu den folgenreichsten gehören, mithin als das Seltenste auf der Welt, nämlich eine wirkliche, große Entdeckung in der Metaphysik, zu betrachten sind.[189]

[187] Alle Zitate sind aus dem späten Werk [Lotze 1879] entnommen, dort S. 12-15. Seine erste *Metaphysik* publizierte Lotze fast vierzig Jahre zuvor in [Lotze 1841].

[188] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 33.

[189] [Schopenhauer 1859], Bd. 1, S. 518.

Dieses Urteil war auf einer Hochschätzung der Anschauung begründet, die Kant wohl etwas verblüfft haben würde, da sie sich nicht nur auf die „reine“, aller Erfahrung vorausgehende Anschauung, sondern – Kant ausdrücklich kritisierend – auch auf die empirische, inhaltsvolle Anschauung bezog. Eben weil auch der „materiale Gehalt der empirischen Anschauung“ betrachtet werden müsse, so glaubte Schopenhauer, könne aus der transzendentalen Analytik von Zeit und Raum auch auf das Wesen der angeschauten Dinge selbst geschlossen, also metaphysische Erkenntnis gewonnen werden.[190]

Dem anschauenden Subjekt kam damit eine Schlüsselrolle für die Kenntnis des Wesens der Dinge und insbesondere des Wesens von Raum und Zeit zu, und Schopenhauer zögerte nicht, daraus eine Kant noch weit überbietende Charakterisierung der begründenden Rolle der Anschauung für die Mathematik und namentlich für die Geometrie zu ziehen. Die euklidische, aus Axiomen synthetisch demonstrierende Methode der Geometrie hielt er für philosophisch abwegig; vielmehr gründe die geometrische Erkenntnis auf unmittelbarer anschaulicher Evidenz.[191] In einer etwas unvorsichtigen Passage erläuterte Schopenhauer dies am Beispiel der Schwierigkeiten eines Beweises des Parallelenpostulats aus einfacheren Axiomen:

> Die Eukleidische Demonstrirmethode hat aus ihrem eigenen Schooß ihre treffendeste Parodie und Karikatur geboren, an der berühmten Streitigkeit über die Theorie der Parallelen und den sich jedes Jahr wiederholenden Versuchen, das elfte Ariom zu beweisen. Dieses nämlich besagt, und zwar durch das mittelbare Merkmal einer schneidenden dritten Linie, daß zwei sich gegen einander neigende (denn dies eben heißt „kleiner als zwei rechte seyn“), wenn genugsam verlängert, zusammentreffen müssen; welche Wahrheit nun zu komplicirt seyn soll, um für selbstevident zu gelten, daher sie eines Beweises bedarf, der nun aber nicht aufzubringen ist; eben weil es nichts Unmittelbareres giebt.[192]

Schopenhauer war mithin so fest von der beweisenden Kraft der unmittelbaren Anschauung (und von der anschaulichen Wahrheit des Parallelenpostulats) überzeugt, dass ihm eine genauere Untersuchung des Postulats und der Möglichkeiten alternativer geometrischer Systeme nicht nur unnötig schien, sondern er die darin liegende Schwierigkeit sogar zur Rechtfertigung seiner Metaphysik der Anschauung heranziehen zu können glaubte.

Eine verwandte, aber doch andersartige Rechtfertigung der traditionellen Geometrie, die in späteren Diskussionen und auch von Hausdorff aufgegriffen wurde, trug Hermann Lotze in den späteren Fassungen seiner *Metaphysik* bei. In einer wortreichen Abhandlung unter dem Titel „Deductionen des Raumes“, die von Spinoza über Kant, Schelling und Hegel bis zu neueren psychologischen Arbeiten zur Raumwahrnehmung und zu den mathematischen Beiträgen der nichteuklidischen und Riemannschen Geometrie reichten, erklärte Lotze es

[190][Schopenhauer 1859], Bd. 1, S. 520 ff.
[191]Vgl. insbesondere ebd., §15.
[192]Ebd., Bd. 2, S. 142 f.

zu seiner Aufgabe, „auch in der Metaphysik auf die innere geometrische Natur des Raumes einzugehen". Er war davon überzeugt, dass die Philosophie einige „schweren Bedenken [...] gegen manche mathematische Speculation der Gegenwart erheben" müsse.[193]

Um diese Bedenken vorzutragen, nahm Lotze zunächst (mit Kant) an, der Raum sei in der Tat eine subjektive Anschauungsform, und verschiedene Wesen (wie sie u.a. Helmholtz imaginiert hatte) könnten die „Verhältnisse der Dinge" in unterschiedlichen Formen anschauen. Dadurch wäre denkbar, dass bei diesen Wesen „nicht unser Raum R, sondern ein anderer R^1 oder R^2 sich bilde", für welche Lotze die Bezeichnung „Raumoide" vorschlug, freilich nur, um sogleich anzuschließen, „dass es Raumoide nicht geben kann".[194] Sein Einwand gegen solche andersartigen „Raumoide", den er nun gegen die Idee eines vierdimensionalen Raumes ebenso wie gegen die gekrümmten Räume der nichteuklidischen Geometrie und auch gegen Riemanns allgemeinen Begriff mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten vortrug, reduziert sich bei näherer Betrachtung auf die doppelte Behauptung, (a) dass einzig der traditionelle, durch Euklids Geometrie zutreffend beschriebene dreidimensionale Raum überhaupt verständlich und mithin ein Raum im eigentlichen und wahren Sinne sei, und (b) dass alle anderen „Raumoide" diesen eigentlichen Raum „als den einzig verständlichen und unentbehrlichen Maßstab" voraussetzen würden, „von dem ihre Bildung, wenn sie überhaupt anschaulich wäre, in bestimmter Weise abwiche."[195] Die imaginierten „Raumoide" waren also nur angeblich Räume; in Wahrheit jedoch, so Lotze, gab es nur *einen* solchen, den der traditionellen Geometrie.

Im Zuge seiner Ausführungen beschrieb Lotze auch die Reaktion, die er für wahrscheinlich hielt, falls Astronomen bei ihren Messungen doch einmal feststellen sollten, dass die Winkelsumme in einem astronomischen Dreieck nicht gleich zwei rechten Winkeln war:

> Bisher sind diese Beobachtungen mit der Euklidischen Geometrie in Übereinstimmung gewesen; käme es aber doch einmal dazu, daß astronomische Beobachtungen großer Entfernungen nach Ausschluß aller Beobachtungsfehler eine kleinere Winkelsumme des Dreiecks nachwiesen, was dann? Dann würden wir glauben, eine sehr sonderbare Refraction entdeckt zu haben, welche die zur Bestimmung der Richtungen dienenden Lichstrahlen abgelenkt hätte.[196]

Treffend an diesem Argument war immerhin, dass in einem solchen Fall auf Kosten der Optik (bzw. der Physik im Ganzen) an der Euklidischen Geometrie des Raumes festgehalten werden konnte. Freilich hielt Lotze dies anders als spätere Interpreten, zu denen auch Hausdorff zählte, nicht für eine theoriepragmatische

[193] [Lotze 1879], S. 234.
[194] Ebd., S. 241.
[195] Ebd., S. 267.
[196] Ebd., S. 248.

matisch zu entscheidende Wahl, sondern angesichts seiner Überzeugung (a) für die einzig denkbare Reaktion der mathematischen Naturwissenschaften.[197]

Schopenhauers und Lotzes Versuche einer metaphysischen Rechtfertigung des Raums der traditionellen Geometrie zeigen klar, was auch Hausdorff an solchen Versuchen einer „Raumdeduction" irritierte: die Verlockung einer nur scheinbar zwingenden Philosophie, dasjenige zur absoluten Wirklichkeit zu erklären, was sich aus einer möglicherweise althergebrachten, aber dennoch bornierten Anschauung ergab. Dass die Verlockung, zu metaphysischen Schlussfolgerungen zu kommen, auch für Philosophen groß war, die sich für Anhänger der empirischen Wissenschaften erklärten, zeigt der Fall des Philosophen Friedrich Ueberweg.

In seiner 1851 veröffentlichten Bonner Habilitationsschrift „Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt" beschrieb Ueberweg die Methode der Geometrie als synthetisches Vorgehen, das von bestimmten Prinzipien (Axiomen oder Postulaten) ausging. Diese Prinzipien verstand er jedoch gegen Kant als synthetische Erkenntnisse a posteriori, nämlich als durch Idealisierung aus der empirischen Anschauung gezogene Wahrheiten:

> Unser Geschäft wird ein dreifaches sein: 1) Unsere Anschauungen zu *analysiren*, um allgemeine Begriffe und Sätze zu gewinnen; 2) die darin gefundenen Bestimmungen zu *idealisiren*, indem wir ihnen eine absolute, unendliche Genauigkeit beilegen; 3) auf den so gewonnenen Grundlagen *synthetisch* fortzubauen.[198]

Auch wenn Ueberweg diesen Ansatz als eine „experimentell-empirische Grundlegung der Geometrie" bezeichnete, zielte er doch auch auf eine Sicherung der absoluten Gewissheit der Geometrie, und in der Tat auf eine Rechtfertigung der Euklidischen Geometrie, die deren ursprüngliche Definitionen und Postulate, einschließlich des Parallelenaxioms, durch sein idealisierendes Verfahren legitimieren wollte.[199] Ueberweg hoffte auf eine doppelte Rechtfertigung der Notwendigkeit der „geometrischen Grundbestimmungen": sowohl aus einer „auch wünschenswerthen philosophischen Ableitung derselben", als auch durch das von ihm vorgestellte Verfahren einer Idealisierung der Raumanschauung, die sodann durch „die fortlaufende approximative Bestätigung ihrer Consequenzen durch die Erfahrung" abgesichert werde.[200]

Die philosophische Ambivalenz dieser Ueberwegschen Überlegungen wurde in seinem 1857 erschienenen *System der Logik* noch deutlicher. Hier suchte

[197]In seiner in diesem Band wiedergegebenen Diskussion von Lotzes Standpunkt bezog sich Hausdorff auf die Schlussseiten des hier zusammengefassten Arguments, [Lotze 1879], S. 266 f.; vgl. NL Hausdorff, Fasz. 1079, Blatt 19 f. Näheres dazu in Abschnitt 3.6.1.

[198][Ueberweg 1851], S. 21; Hervorhebungen im Original. Ueberwegs Habilitationsschrift ist wiederabgedruckt in der Sammlung [Ueberweg 1889].

[199]Manche modernen Interpreten haben aus diesen Bemerkungen etwas vorschnell den Schluss gezogen, dass Ueberwegs frühe Schrift als ein Beitrag zur empiristischen Richtung in den Grundlagen der Mathematik zu rechnen sei, vgl. z.B. [Torretti 1978], S. 260-264; genauer dazu bei [Peckhaus 1999], S. 836-840.

[200][Ueberweg 1851], S. 23 f.

er nun offen gegen Kants transzendentale Ästhetik die metaphysische Realität von Raum und Zeit zu rechtfertigen. Er zitierte zustimmend die Aussage Friedrich Schleiermachers: „Raum und Zeit sind die Art und Weise zu sein der Dinge selbst, nicht nur unserer Vorstellungen“.[201] Die räumlichen und zeitlichen Formen unserer Wahrnehmung waren für ihn nicht Voraussetzungen für die Erfahrung einer geordneten Natur, sondern Folgen einer entsprechenden, durch die (traditionelle, euklidische) Geometrie und die (Newtonsche) Naturwissenschaft erfassten Ordnung der Natur. Nach seiner Auffassung „spiegelt sich in der äußeren Wahrnehmung die eigene räumlich-zeitliche Ordnung und in der inneren Wahrnehmung die eigene zeitliche Ordnung der realen Objecte ab“[202]; durch die Idealisierung unserer unvollkommenen Wahrnehmungen war es möglich, diese reale Ordnung selbst zu erfassen. Überweg nannte die von ihm eingenommene Position nun auch die eines „idealrealistischen“ Verständnisses von Zeit, Raum, Materie usw.

Auch Überweg suchte in diesem Zusammenhang alternative Beschreibungen auszuschließen, so etwa die Idee, dass der Raum eine andere Dimensionenzahl als drei habe: Nur dort könne das Newtonsche Gravitationsgesetz in der bekannten Form gelten; in einem zweidimensionalen Raum müsse die Schwerkraft „zu den Entfernungen selbst, bei vier Dimensionen zu den Cuben der Entfernungen im umgekehrten Verhältniss stehen“.[203] Auch über den Wert derartiger „Deductionen“ sollte sich Hausdorff später wiederholt äußern.[204]

Wurde die Metaphysik des Raumes vor allem mit der gesetzlichen Ordnung der Natur in Verbindung gebracht, so waren die metaphysischen Überlegungen zur Zeit in den Augen der zeitgenössischen Autoren vor allem mit Fragen der Moral verbunden. So dachte etwa Schopenhauer zwar den Ausgangspunkt des Handelns, den Willen eines Individuums, als ein selbst zeitloses und insofern ewiges „Ding an sich“; in den „Willensakten“, den menschlichen Handlungen erschien dieser Wille gleichwohl in Zeit und Raum, und dort war er ethisch zu beurteilen.[205] Auch Schopenhauers Ethik der radikalen Willensverneinung verwies daher nicht nur auf eine Haltung, die jenseits der Zeit gedacht werden sollte, sondern auch zurück in das Geschehen der Zeit.

Sobald dieses nun metaphysisch überhöht und der zeitliche Verlauf des Weltgeschehens zur absoluten Realität erklärt wurde, ergaben sich philosophische Standpunkte, die – so jedenfalls nahm Hausdorff es wahr – in ihrer Engstirnigkeit vergleichbar waren mit der Behauptung der absoluten Realität des dreidimensionalen euklidischen Raumes. Hausdorff sah Schopenhauer als einen Vertreter einer „ontologischen“ Metaphysik, in welcher „die Welt ein Seiendes, Ganzes, Allgegenwärtiges, ein erstarrter Fluss“ war, und für welche „Vergangenheit Gegenwart Zukunft [lediglich] Scheinkategorien, die für die Beurtheilung des Weltwesens nicht in Betracht kommen“, waren. Die entgegengesetzte,

[201] [Überweg 1857], S. 82, mit Verweis auf Schleiermachers *Dialektik*.
[202] Ebd., S. 81.
[203] Ebd.
[204] Vgl. *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 117 und S. 170, sowie Abschnitt 3.6.1.
[205] Vgl. z.B. [Schopenhauer 1859], Bd. 1, S. 134.

„genealogische“ Metaphysik einer zur absoluten Realität erklärten Zeit sah er in Hegel und noch mehr

> in der meisterhaften Caricatur durch E. v. Hartmann (der es fertig bringt, dem „Weltprocess“ ein Ziel und damit ein Ende zu geben), sodann in der populären Fassung, die sich mit Aneignung naturwissenschaftlicher Ergebnisse „Entwicklungstheorie“ nennt und die Philosophie des neunzehnten Jahrhunderts bedeuten will.[206]

Eduard von Hartmann hatte in seiner 1869 veröffentlichten *Philosophie des Unbewussten* eine Metaphysik des „Weltprocesses“ vorgelegt, die ebenso an den pessimistischen und „ontologischen“ Schopenhauer wie an den optimistischen und „genealogischen“ Hegel anschloss und zwischen einem Hohelied des Fortschritts und einer christlich inspirierten Metaphysik der Erlösung schwankte, und deren praktisches Ziel „die volle Hingabe der Persönlichkeit an den Weltprocess um seines Zieles, der allgemeinen Welterlösung willen“ war.[207]

So wie dem euklidischen Raum Alternativen gegenüberstanden, so auch der zur absoluten Realität erklärten linearen Zeit. Hausdorff, der eine entschiedene Kritik jeder Zeitmetaphysik vorlegen sollte, sah ein philosophisches Beispiel für eine solche Alternative vor allem in Friedrich Nietzsches Lehre von der ewigen Wiederkunft des Gleichen. Diese und Hausdorffs Beziehung zu ihr wurden bereits in der „Einleitung des Herausgebers“ Werner Stegmaier zu HGW, Band 7 ausführlich diskutiert und brauchen daher hier nicht erneut dargestellt werden. Nietzsches Werk enthielt in der Tat ganz unterschiedliche Versuche, alternative Zeitformen durchzuspielen; so skizzierte er in den frühen 1870er Jahren auch die Idee einer Zeitatomenlehre, welche nur einzelne Zeitatome und keine Kontinuität kannte; später kreisten seine Überlegungen dann eben um die letztlich (und möglicherweise bewusst) paradoxe Idee eines ewig zyklischen Weltverlaufs. In seiner Gegenüberstellung einer „ontologischen“ und einer „genealogischen“ Metaphysik nutzte Hausdorff die (von ihm eingeräumte) *Möglichkeit* einer ewigen Wiederkunft als einen Vergleichsmaßstab, an dem gemessen beide Varianten der Metaphysik ihre Willkürlichkeit offenbarten. Zugleich sprach er sich entschieden gegen eine ihrerseits metaphysisch überhöhte Behauptung der *Notwendigkeit* der ewigen Wiederkunft aus, wie sie der späte Nietzsche – jedenfalls nach Hausdorffs Überzeugung – erfolglos zu beweisen versucht hatte.[208]

2.3.6 Empirisch orientierte Ansätze

Wie wir am Beispiel von Hermann v. Helmholtz und Karl Ernst v. Baer bereits gesehen haben, zogen einige den Naturwissenschaften nahestehende Autoren

[206] Dieses und die vorigen Zitate in *Sant' Ilario*, S. 316 f.; Hausdorff griff diese Charakteristik der Zeitmetaphysiken wieder auf in *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 39-41.

[207] [Hartmann 1869], S. 638.

[208] Vgl. *Sant' Ilario*, Aphorismus 406, und *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 193 f. Die unterschiedliche Fassung dieser beiden Passagen besitzt, wie Walter Purkert zuerst dargelegt hat, Bedeutung für die Datierung von Hausdorffs Kenntnisnahme der Cantorschen Mengenlehre, vgl. dazu unten, Abschnitt 3.1.2.

erkenntnistheoretische Konsequenzen, die transzendentale oder metaphysische Begründungen der Begriffe Zeit und Raum ganz zurückwiesen. Sie gingen davon aus, dass unser Wissen über Zeit und Raum aus Erfahrungen hervorgeht und nicht aus unabhängig von der Erfahrung gegebenen Anschauungen, Begriffen usw. Wie solche Erfahrungen hierbei im einzelnen gedacht werden, war im 19. Jahrhundert eine selbst hochgradig umstrittene Frage im Grenzgebiet von philosophischer Erkenntnistheorie, Sinnesphysiologie und der sich allmählich formierenden Psychologie.[209]

Bereits in der ersten Jahrhunderthälfte finden sich philosophische Positionen, die auch der Geometrie eine empirische Grundlage zusprachen. Dabei handelte es sich im englischsprachigen Raum vor allem um John Stuart Mill, der im Anschluss an die sensualistischen und empiristischen Traditionen der englischsprachigen Philosophie *alle* Wissenschaften – einschließlich der Arithmetik – auf empiristischer Grundlage zu erklären suchte.[210] Eines seiner zentralen Argumente in Bezug auf die Geometrie war, dass sich ihre Grundbegriffe – also etwa Punkte, Geraden, Ebenen usw. – *nicht* im strengen Sinn in der sinnlichen Erfahrung aufweisen ließen, sondern dass sie vielmehr idealisierte Präzisierungen derselben darstellten, freilich solche, die immer noch erlaubten, die Geometrie als eine aus der Erfahrung gewonnene Wissenschaft zu verstehen. Ausgehend von den kontrollierten Fiktionen der grundlegenden Definitionen bestand nach Mills Überzeugung die Geometrie dann aus einem syllogistischen Gebäude, an dessen Anfang hypothetisch vorausgesetzte Sätze standen. Letztere wiederum sah er – noch ohne Bezug auf die Frage der nichteuklidischen Geometrien – als aus der Erfahrung gewonnene, aber nur annähernd wahre Sätze über räumliche Verhältnisse an. Auf den naheliegenden Einwand, dass auch Sätze wie „Zwei Geraden in einer Ebene können keine Fläche einschließen“ nicht aus der sinnlichen Erfahrung zu gewinnen waren, antwortete er bemerkenswerter Weise mit einem Verweis auf die Möglichkeiten der menschlichen Imagination, die den Kantischen Vorstellungen einer „reinen Anschauung“ näher stand, als es einem konsequenten Empiristen recht sein konnte: Er sprach von einer „capacity of being painted in the imagination with a distinctness equal to reality“.[211] Mills Verständnis der geometrischen Axiome war vorsichtiger als das im vorigen Abschnitt besprochene, stärker zur Metaphysik neigende Verständnis Ueberwegs, für den die Aussagen der Axiome nicht nur annähernd wahre Hypothesen, „painted in the imagination“, waren, sondern zwar aus der Erfahrung – a posteriori – gewonnene, aber doch sichere synthetische Wahrheiten.

Eine wichtige Veränderung der empiristischen Position zu den Konzepten von Zeit und Raum wurde in dem Moment notwendig, in dem anerkannt wurde, dass für die mathematische und naturwissenschaftliche Bestimmung beider

[209] Zu den Anfängen einer empirisch orientierten Philosophie der Natur und der Naturwissenschaften im 19. Jahrhundert vgl. auch die wichtige Studie [Heidelberger 1993] über Gustav Theodor Fechner und seine Rezeption.

[210] Das hier zentrale Werk Mills ist sein *System of Logic* von 1843.

[211] [Mill 1843], Bd. 1, S. 309. Eine kritische Diskussion des Millschen Empirismus der Geometrie findet sich in [Torretti 1978], S. 256-260.

Begriffe verschiedene Möglichkeiten bestanden, zwischen denen künftige Erfahrung vielleicht entscheiden konnte, die aber zumindest vorläufig nebeneinander gestellt werden mussten. Hausdorff sollte hier später vom Übergang von einem „unbesonnenen" zu einem „besonnenen Empirismus" sprechen.[212] Für ihn war John Stuart Mill noch ein „ein unbesonnener Empirist", da auch dieser noch glaubte, die Gültigkeit der euklidischen Geometrie aus der Erfahrung rechtfertigen zu können.[213] Der erste besonnenere Empirist war in Hausdorffs Augen Hermann v. Helmholtz, zu dem wir daher noch einmal zurückkehren.

Wie wir gesehen haben, bezeichnete sich Helmholtz zunächst in seiner Sinnesphysiologie als Vertreter eines empiristischen Standpunkts.[214] Auch in seinen populären Schriften zur nichteuklidischen Geometrie, namentlich in dem bereits erwähnten Text „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" suchte Helmholtz deutlich zu machen, dass unter den unbewiesenen Ausgangspunkten der Geometrie Sätze waren, die nur der Erfahrung entnommen sein konnten, da sich eine andersartige Erfahrung denken ließ, welche zu einer anderen als der gewohnten euklidischen Geometrie führten.[215] Allerdings war Helmholtz der Überzeugung, dass nicht alle Aspekte der Geometrie empirischer Natur waren; so zählte er, wie ebenfalls bereits ausgeführt, die freie Beweglichkeit starrer Körper zu den Bedingungen der Möglichkeit räumlicher Messung, also zu den transzendentalen Voraussetzungen der Geometrie.

Eine genauere Klärung, welche der Prinzipien der Geometrie empirisch waren und welche nicht, erforderte in Helmholtz Augen eine genauere und kritische Bestimmung der erkenntnisbegründenden Kraft, welche der Anschauung zugesprochen wurde. Dieser Aspekt wurde von Helmholtz besonders in einer Antwort auf die Einwände den Kantianers Jan Pieter Nicolaas Land gegen seine Abhandlung „Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" betont, die auch ein wichtiges Motiv seiner sinnesphysiologischen Erkenntnistheorie wieder aufgriff, nämlich die Vorstellung, dass intuitiv gezogene Schlüsse aus den Wahrnehmungen nicht fixiert, sondern durch Gewohnheit erlernbar und daher auch veränderbar waren. Schon die gewöhnliche, alltägliche Anschauung hatte Mängel, und vor allem: Sie musste aus fortgesetzter Erfahrung gebildet und geübt werden. Aus diesem Grund durfte die (wie Helmholtz bereits in seiner ersten Abhandlung ausgeführt hatte, ohnehin nur scheinbare) Schwierigkeit der Veranschaulichung nichteuklidischer Verhältnisse nicht zum Argument gegen deren Möglichkeit gemacht werden:

> Da nun die metamathematischen Raumverhältnisse von uns nie gesehen worden sind, so kann die Schnelligkeit und Leichtigkeit der Vorstellung wechselnder Ansichten der Gegenstände in denselben, welche durch alltägliche Erfahrung und Uebung erworben wird, von dieser Anschauung nicht verlangt werden, sondern nur, dass überhaupt, wenn auch langsam

[212] Zu diesem zentralen Punkt von Hausdorffs Erkenntniskritik vgl. Abschnitt 4.3.
[213] Vgl. *Das Raumproblem*, S. 18.
[214] Vgl. Abschnitt 2.3.1.
[215] Vgl. Abschnitt 2.3.2.

> und durch Ueberlegung die ihnen entsprechende Reihe der Sinneseindrücke vollständig und widerspruchslos zu finden sei.
>
> Wir stossen übrigens auf ganz ebenso grosse und ähnliche Schwierigkeiten des Vorstellens, wenn wir uns die Führung eines in einen verwickelten Knoten geschlungenen Fadens, oder ein vielflächiges Krystallmodell oder ein Gebäude von verwickeltem Bauplan vorstellen wollen, ohne es gesehen zu haben, obgleich die Anschaubarkeit dieser letzteren Gebilde durch thatsächliche Anschauung erwiesen werden kann.[216]

Eben dieses Zitat sollte auch Hausdorff später in seinen eigenen Ausführungen zur Problematik der Anschauung verwenden.[217] Musste so die von den Kantianern ebenso wie von Philosophen wie Ueberweg so geschätzte Vorstellung, die geometrischen Axiome aus der (nur vermeintlich sicheren) Anschauung begründen zu können, aufgegeben werden, so bot sich Helmholtz stattdessen die Idee einer auf der physikalischen Raummessung beruhenden Geometrie an, die tatsächlich eine Erfahrungswissenschaft war:

> Dies würde uns eine Art von Geometrie geben, die ich einmal für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung *physische Geometrie* nennen will, um sie zu unterscheiden von der Geometrie, die auf die hypothetisch angenommene transcendentale Anschauung des Raumes gegründet wäre. Eine solche rein und absichtlich durchgeführte physische Geometrie würde offenbar möglich sein und vollständig den Charakter einer Naturwissenschaft haben.[218]

Wichtig an dieser Überlegung war, dass damit die Frage der empirischen Grundlagen der Geometrie von der Frage der Raumanschauung getrennt wurde: Das Verhalten der physischen Körper scheint sich in allen von Helmholtz zur Illustration durchgespielten Gedankenexperimenten zu verändern, aber die (auf Gewöhnung beruhende) anschauliche *Wahrnehmung* und die Ergebnisse der exakten *Messung* der geometrischen Eigenschaften von Körpern könnten auseinanderfallen.

In diesen Kontext gehört auch die schon bei Laplace diskutierte und bei Helmholtz wieder aufgegriffene Imagination der gleichmässigen Vergrößerung oder Verkleinerung aller räumlichen Gegenstände. Auch Helmholtz – der von der empirischen Geltung der euklidischen Geometrie als physischer Geometrie überzeugt war – betonte, dass,

> wenn die sämtlichen linearen Dimensionen der uns umgebenden Körper und die unseres eigenen Leibes mit ihnen in gleichem Verhältnisse, z.B. alle auf die Hälfte, verkleinert oder alle auf das Doppelte vergrössert würden, wir eine solche Änderung durch unsere Mittel der Raumanschauung gar nicht würden bemerken können.[219]

[216] [Helmholtz 1878], S. 645.
[217] Vgl. Abschnitt 4.2.3.
[218] Helmholtz 1878], S. 649.
[219] [Helmholtz 1870], S. 24; Hausdorff zitiert diese Passage in *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 84.

Und auch nicht, so muss ergänzt werden, durch unsere Mittel der physikalischen Messung. Gab man die Idee der (absoluten) Starrheit der Messkörper preis, so waren sogar noch weitere Variationen denkbar: Auch dann wäre eine plötzliche Raumtransformation empirisch nicht feststellbar,

> wenn die Dehnung oder Zusammenziehung nach verschiedenen Richtungen hin verschieden wäre, vorausgesetzt, dass unser eigener Leib in derselben Weise sich veränderte und vorausgesetzt ferner, dass ein Körper, der sich drehte, in jedem Augenblick ohne mechanischen Widerstand zu erleiden oder auszuüben, denjenigen Grad der Dehnung seiner verschiedenen Dimensionen annehme, der seiner zeitigen Lage entspricht.[220]

Alle derartigen fiktiven Variationen unterstrichen zum einen, wie unzuverlässig die naive Anschauung in Fragen der genauen empirischen Erkenntnis war, und andererseits, welche Grenzen einer genauer messenden naturwissenschaftlichen Erfahrung gesetzt waren.

Die Notwendigkeit, die (physische) Geometrie auf Messungen zu begründen, und deren Grenzen wurden auch in Bernhard Riemanns Habilitationsvortrag betont. Die einfachen Tatsachen, welche die Ausgangspunkte der Geometrie als Wissenschaft der „Massverhältnisse des Raumes" bilden, sind, so Riemann,

> wie alle Thatsachen nicht nothwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, sie sind Hypothesen; man kann also ihre Wahrscheinlichkeit, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung allerdings sehr gross ist, untersuchen und hienach über die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtung, sowohl nach der Seite des Unmessbargrossen, als nach der Seite des Unmessbarkleinen urtheilen.[221]

Riemanns Überlegungen bauten nach seiner Auskunft auch auf „einigen philosophischen Untersuchungen" des Pädagogen und Philosophen Johann Friedrich Herbart auf; ein Umstand, der bereits in der zeitgenössischen Literatur wahrgenommen und vor allem von Benno Erdmann, auf dessen Ausführungen wir gleich zurückkommen, betont wurde.[222]

Am Ende seiner Ausführungen kam Riemann noch einmal auf die Frage zurück, „in welchem Umfange diese Voraussetzungen [der Geometrie] durch die Erfahrung verbürgt werden". Zunächst merkte er an, dass in der Geometrie,

> wo die möglichen Fälle eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, jede Bestimmung aus der Erfahrung immer ungenau bleibt – es mag die Wahrscheinlichkeit, dass sie nahe richtig ist, noch so gross sein.[223]

---

[220] Ebd.; auch diese Überlegung hat Hausdorff später in *Das Chaos in kosmischer Auslese* aufgegriffen.

[221] [Riemann 1868], S. 134.

[222] Die Rolle Herbarts für die Entwicklung einer empiristischen Philosophie von Zeit und Raum – und insbesondere das von Erdmann herausgehobene Konzept einer allgemeinen „Reihenform" – kann hier nicht weiter ausgeführt werden; zu Riemanns Bezugnahme auf Herbart vgl. [Scholz 1982.]

[223] [Riemann 1868], S. 147.

In der neuen Situation, in welcher die Geometrie sich nun im Rahmen einer allgemeineren mathematischen Theorie mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten befand, war dieser Hinweis von grundlegender Bedeutung, da damit eine empirische Entscheidung zwischen den verschiedenen Möglichkeiten, selbst im Fall einer (kleinen) konstanten Krümmung des Raumes. nur noch im „Unmessbargroßen“ möglich wäre. Aber:

> Die Fragen über das Unmessbargrosse sind für die Naturerklärung müssige Fragen.[224]

Anders war es mit den Fragen über das „Unmessbarkleine“. In einer später berühmt gewordenen Passage deutete Riemann an, dass

> die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren [scheinen]; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen.[225]

Ebenso musste die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, dass „das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden“ könnte. Die Entscheidung über alle diese Fragen, so Riemann, konnte nur auf dem Weg der Erfahrungswissenschaft gefunden werden, sofern darauf geachtet wurde,

> dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.[226]

Die Bedeutung dieser Andeutungen für die Entfaltung eines wissenschaftlichen Empirismus von Raum und Zeit kann kaum überschätzt werden. Wie wir bereits in Abschnitt 2.3.3 gesehen haben, gehörte in England William Kingdon Clifford zu den frühen Befürwortern der Riemannschen Haltung. Nicht nur in dem bereits zitierten Fragment „On the Space Theory of Matter“ hob Clifford neben den mathematischen auch die erkenntnistheoretischen Aspekte von Riemanns Ansichten hervor; er entfaltete eine eigene, entschieden empiristische Wissenschaftstheorie ausführlich in seinen philosophischen Schriften, insbesondere in seiner umfangreichen Abhandlung „The Philosophy of the Pure Sciences“ und seinem für ein breites Publikum verfassten, erst posthum gedruckten Werk *The Common Sense of the Exact Sciences*.[227]

In Deutschland sollte der später vor allem durch philosophiehistorische Arbeiten bekannt gewordene Benno Erdmann die Rolle des Philosophen übernehmen, der die erkenntnistheoretischen Konsequenzen der nichteuklidischen

[224]Ebd., S. 148.
[225]Ebd., S. 149.
[226]Ebd., S. 150.
[227]Vgl. [Clifford 1879], Bd. 1, S. 254-340, sowie [Clifford 1885].

Geometrie und der Riemannschen Theorie der Mannigfaltigkeiten für ein philosophisches Publikum darlegte. Erdmann, der unter anderem bei Helmholtz studiert hatte, gab in seiner 1877 veröffentlichten Habilitationsschrift *Die Axiome der Geometrie* eine umfassende Darstellung einer konsequent empiristischen Philosophie der Geometrie, die sich nicht nur auf „Herbarts psychologischen Empirismus“[228] und andere frühe Studien zur Psychologie der Wahrnehmung von Fechner bis Helmholtz stützte, sondern auch ausführlich die Entwicklung der neuen Geometrie von Bolyai und Lobatschewski bis zu Riemann schilderte. Dabei sprach er den Begründern der nichteuklidischen Geometrie und Riemann vor allem die mathematische Leistung zu, auch andere geometrische Begriffssysteme aufgewiesen zu haben; Helmholtz wiederum wurde dafür gelobt, dass er nachgewiesen habe, dass man sich diese geometrischen Systeme auch anschaulich vorstellen könne, so dass der scheinbare Zwang zu einem bestimmten geometrischen System (etwa dem Euklids) jedenfalls nicht einer Anschauung a priori zugeschrieben werden konnte.

Wie Mill und Ueberweg verstand Erdmann die Geometrie als ein demonstrativ beweisendes Gebäude, das auf der Basis bestimmter Axiome errichtet war. Daher sah auch er die erkenntnistheoretische Charakterisierung der Geometrie auf die Frage der Natur der Axiome reduziert. Über diese Axiome sprach er sich (nach teils sehr umständlichen philosophischen Abgrenzungen von anderen Autoren der Zeit) schließlich so aus:

> Sie sind nicht das einseitige Erzeugnis einer geistigen Tätigkeit, die der Erfahrung bei den ersten zufälligen Anlässen mit einer geschlossenen Reihe fertiger Formen gegenübertritt, nicht ewige Wahrheiten, die einer Erfahrung, von der sie gänzlich unabhängig sind, die sie vielmehr im eigentlichsten Sinne selbst machen, unabänderliche Gesetze vorschreiben. Sie bilden das Product einer Wechselwirkung von zwei gleich wesentlich bestimmenden Ursachen, deren eine in den Tiefen unseres Geistes, deren zweite in der Natur der Dinge ruht, sie geben Urteile über Tatsachen, welche die bisher unseren Sinnen zugängliche Erfahrung (in objectivem Sinne) zu ihrem geistigen Ausdruck bringen. Sie müssen als Hypothesen bezeichnet werden, wenn man unter Hypothesen diejenigen Annahmen versteht, die behufs Erklärung einer Summe von Vorgängen gemacht, jedoch, entweder weil noch nicht alle dazu gehörigen Vorgänge untersucht wurden oder weil sie zur vollständigen Erklärung der bekannten Vorgänge nicht ganz ausreichend befunden wurden, noch nicht streng verificirt werden konnten.[229]

Wie auch Hausdorff später anerkannte, war Erdmann damit einer der wenigen akademischen Philosophen, die schon früh eine Form jener erkenntnistheoretischen Position verteidigten, welche Hausdorff einen „besonnenen Empirismus“ nannte.[230]

[228] [Erdmann 1877], S. 29
[229] [Erdmann 1877], S. 153.
[230] *Das Raumproblem*, Anm. 28, S. 22 f.

Wie wir bereits früher gesehen haben, findet sich auch das Durchspielen von abweichenden mathematischen Formen der Zeit bei anderen naturwissenschaftlich orientierten Autoren dieser Jahrzehnte. Hausdorff verwies in diesem Zusammenhang wiederum mehrfach auf William Kingdon Clifford, der sich mit der Möglichkeit auseinandergesetzt hatte, dass die Zeit aus einer diskreten Reihe von sehr schnell aufeinanderfolgenden Momenten bestehen könnte, die wir lediglich deshalb als kontinuierlich erleben, weil unsere Wahrnehmung nie den einzelnen Moment erfasst, sondern stets Gruppen von Wahrnehmungen miteinander verschmilzt.[231] Auch Riemanns knappe Andeutungen über die Möglichkeit, dass „das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden" könnte (s.o.), ließ sich grundsätzlich ebenso auf die Zeit übertragen. Damit geriet, wie vor allem Clifford klar sah, auch die Philosophie der Zeit, die lange noch fester in aprioristischen und metaphysischen Vorstellungen befangen blieb als die des Raumes, in den Bereich eines sich allmählich formierenden konsequenten wissenschaftlichen Empirismus.

Dieser erkenntnistheoretischen, von Mathematikern und Naturwissenschaftlern mit getragenen Strömung hat Hausdorff sich selbst am ehesten zugehörig gefühlt, wie er etwa in der Vorrede zu *Das Chaos in kosmischer Auslese* ausdrücklich angab. Mit Bezug auf das zwischen Philosophie und Mathematik verhandelte Problem des Raumes heißt es dort:

> Gerade die auch von mir gestreifte Frage nach der Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie ist ein Gegenstand, an dem philosophischerseits von Grossen und Kleinen ein gewaltiger Aufwand von Sachunkenntnis verschwendet wurde; möge meine Auffassung, die sich am nächsten mit der Helmholtz'schen berührt, zur Zerstreuung der Vorurtheile beitragen.[232]

2.3.7 Die französische Debatte

Spätestens ab der Mitte der 1880er Jahre entwickelte sich in der französischsprachigen Literatur eine eigenständige und teilweise heftige Debatte über den Status der Konzepte von Zeit und Raum sowie der Wissenschaft der Geometrie, in welche sowohl die zeitgenössischen Entwicklungen der Physik als auch die Bemühungen einer sich formierenden Psychologie der Zeit- und Raumwahrnehmung eingingen. Diese Debatte, die insbesondere in den Zeitschriften *Revue philosophique* (deren erster Band im Jahr 1876 erschien) und ab 1893 in der *Revue de métaphysique et de morale* ein Forum fand, war noch stärker als die deutsche, im Banne Kants stehende Diskussion durch eine enge Bezugnahme auf die Argumente und Resultate der Naturwissenschaften, der experimentellen Psychologie und der neuen mathematischen Geometrien gekennzeichnet. Zu den Autoren gehörten neben französischen Gelehrten auch etliche Beiträger

[231] Vgl. oben, Abschnitt 2.3.3.
[232] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. VI.

aus dem europäischen Ausland, darunter auch Hausdorffs akademische Lehrer Friedrich Paulsen und Hugo Münsterberg.[233]

Hausdorff hat sich in seinen Schriften und Manuskripten zu Zeit, Raum und Geometrie wiederholt auf Beiträge zu diesen Debatten gestützt, mehrfach auch in Form kritischer Notizen zu den französischen Originalpublikationen. Daher sei hier ebenfalls ein kurzer Blick auf sie geworfen. Eine detaillierte historische Untersuchung dieses komplexen Debattenfeldes kann an dieser Stelle freilich nicht erfolgen, und auch eine umfassende Untersuchung der Rückgriffe Hausdorffs auf die einschlägigen französischen Debatten muss künftiger Forschung überlassen bleiben. Im Folgenden seien lediglich einige jener Aspekte der französischen Debatten über Zeit, Raum und Geometrie herausgegriffen, die für Hausdorffs Schriften von besonderer Bedeutung waren.

Beginnen wir mit einem Blick auf die französische Rezeption und Diskussion der nichteuklidischen Geometrien. Für die hier zu beschreibenden Diskussionen kann der bemerkenswert klare Aufsatz „Les espaces géométriques" des französischen Ingenieurs Auguste Calinon als Auftakt gelten.[234] In seinem Beitrag umriss Calinon die Vorstellung einer „géométrie générale", in welcher die Euklidische Geometrie nur ein Spezialfall war:

> elle consiste simplement dans l'application de la méthode dite géométrique à un groupe de formes (lignes ou surfaces) dont la première est soumise à cette seule condition de permettre l'application de cette méthode. Comme nous le verrons plus loin, la géométrie ainsi comprise est une science plus générale que la géométrie des anciens.[235]

Unter der „méthode géométrique" verstand Calinon ein „reines Schlussfolgern", das „keinerlei experimentelle Basis" besaß.[236] Wie er im Folgenden darlegte, betrachtete er insbesondere eine Geometrie nach dem Muster Euklids, in der kein Äquivalent des Parallelenaxioms galt, als allgemeine Geometrie in seinem Sinne. Im Anschluss an Lobatschewski und Beltrami unterschied er die verschiedenen Alternativen zur dreidimensionalen Euklidischen Geometrie durch einen reellen Parameter; er verzichtete hier jedoch darauf, diesen als Raumkrümmung zu interpretieren. Die allgemeine Geometrie wurde dadurch die Geometrie einer Serie von verschiedenen dreidimensionalen „espaces géométriques", wobei jedem Wert des Parameters ein solcher Raum entsprach. Der Artikel endete mit der Frage, welche dieser speziellen Geometrien „in der materiellen Welt

233 Das Interesse der Herausgeber, einschlägige Beiträge aus dem Ausland zu gewinnen oder zumindest eine kritische Sichtung ausländischer Literatur in die Journale einzubeziehen, ist oft sehr deutlich. Es kommt insbesondere im vollen Titel der erstgenannten Zeitschrift, *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, zum Ausdruck.

234 [Calinon 1889]. Calinon war ausgebildet an der École Polytechnique und arbeitete als „chef de correspondance" im Eisenwerk von Pompey, das u.a. im Jahr 1887 die Bestellung für das Eisen des Eiffelturms erhielt, vgl. [Walter 2007], Chap. 13. Wie wir noch sehen werden, hatte Calinon sich bereits in den Jahren zuvor als kompetenter Kenner der Epistemologie der exakten Wissenschaften ausgewiesen.

235 [Calinon 1889], S. 589.

236 Ebd., Übersetzungen M.E.

realisiert" war.[237] Diese Frage musste durch die Erfahrung entschieden werden, und sie war offen. War die allgemeine Geometrie eine Sache des reinen Schlussfolgerns, so die Anwendung einer besonderen Geometrie auf die physische Welt eine Sache der Beobachtung und des Messens. Insbesondere, so fügte Calinon an, konnte die Überzeugung, dass unser Raum „homogen" war (d.h. ähnliche Figuren bzw. Ähnlichkeitstransformationen erlaubte, was allein in der Euklidischen Geometrie der Fall war[238]), nicht a priori hergeleitet werden, sie war vielmehr durch lange Erfahrung gewonnen. Zudem bezog diese Erfahrung sich nur auf einen kleinen Teil des physischen Raumes und war daher nicht zwingend. Sie hatte lediglich zur Folge, dass die Unterschiede der Geometrie des physischen Raumes von der des Euklidischen Raumes gering waren. Für die Beziehung des bestimmenden Parameters zur Wirklichkeit gab es nach Calinon folgende Möglichkeiten, wobei er bemerkenswerterweise nicht nur den Raum, sondern auch die Zeit mit einbezog:

> 1. Notre espace est et reste rigoureusement euclidien;
> 2. Notre espace réalise un espace géométrique très peu différent de l'espace euclidien, mais toujours le même;
> 3. Notre espace réalise successivement dans le temps divers espaces géométriques; autrement dit, notre paramètre spatial varie avec le temps, soit en s'écartant plus ou moins du paramètre euclidien, soit. en oscillant autour d'un paramètre déterminé très voisin du paramètre euclidien.[239]

Calinons Text und vor allem seine Schlussbemerkungen über die Anwendung der allgemeinen Geometrie auf „unseren Raum" riefen mehrere Kritiker und einige Befürworter auf den Plan. Ein erster Austausch fand noch 1889 in dem von dem renommierten Kantianer Charles Renouvier herausgegebenen Journal *La critique philosophique, politique, scientifique, littéraire* statt. Dort stellte Georges Lechalas, ein ebenfalls als Ingenieur ausgebildeter Autor mit philosophischen und theologischen Neigungen, seine eigene, an Calinon anschließende Konzeption der „géométrie générale" vor. Auch er ging davon aus, dass die allgemeine Geometrie allein durch widerspruchsfreies Schlussfolgern aus Voraussetzungen, welche das Parallelenpostulat nicht einschlossen, gewonnen werden könne. Lechalas betonte dabei zwei Gesichtspunkte besonders: Zum einen, so glaubte er, war der Begriff der Größe nicht nur in der Euklidischen Geometrie, sondern auch in der allgemeinen Geometrie rein relativ, da sich auch dort Figuren beliebig vergrößern und verkleinern ließen; dabei war ihm wohl bewusst, dass nur die Euklidische Geometrie in dem von Calinon beschriebenen Sinn homogen war. Den möglichen Widerspruch zwischen beiden Aussagen löste er dadurch auf, dass er sich alle speziellen (euklidischen und nichteuklidischen, dreidimensionalen) Räume in einen vierdimensionalen (euklidischen) Raum eingebettet dachte. Die hierin liegende Unklarheit sollte ein Jahr später

[237] Ebd., S. 594.
[238] Die Terminologie der damaligen Diskussion unterscheidet sich oft von der heute üblichen; dies ist auch im Folgenden zu beachten, wenn von der „Homogenität" des Raumes die Rede ist.
[239] [Calinon 1889], S. 595.

Louis Couturat aufklären, wie wir gleich sehen werden. Zum anderen betonte Lechalas, dass auch die „géométrie générale“ nicht zu einer empiristischen Auffassung der Geometrie und der Mathematik zwinge, denn auch die für sie erforderlichen Voraussetzungen könnten Urteile a priori sein. Freilich galt das dann nur noch für eine geringere Zahl von Annahmen, als von den an Kant orientierten Verteidigern der euklidischen Geometrie, zu denen auch Renouvier zählte, angenommen wurde. Lechalas glaubte sogar, dass allein die für die Größenlehre (Arithmetik) notwendigen Voraussetzungen ausreichten, um auch die „géométrie générale“ zu begründen.[240]

Renouvier wiederum hielt sowohl Calinons wie auch Lechalas’ Verteidigung einer „allgemeinen Geometrie“ für illegitim, da sie den „caractère illogique de la géométrie non euclidienne“ verkenne.[241] Sehr wortreich führte der Altmeister der französischen Kantianer aus, dass nicht nur das (in Kants Sinn analytische) Schlussfolgern, sondern auch das (synthetische) Begründen der Ausgangspunkte der Geometrie zur Logik der Wissenschaft Geometrie gehörte, und dass allein die altehrwürdige Geometrie Euklids in diesem Sinne „logisch“ begründet war, sowie dass in den sogenannten nichteuklidischen Geometrien viele „reine Anschauungen“ verletzt wurden. Auf dieses Argument antwortete Lechalas wiederum mit einem Verweis, der zwar die von Kant und Renouvier angemahnte Verbindung von Geometrie und Anschauung einräumte, aber an die früheren, auch bei Helmholtz aufgegriffenen Vorstellungen andersartiger Anschauungen anknüpfte:

> Il n’y a aucune difficulté à admettre que notre sensibilité pourrait être autre qu’elle n’est, et, par suite, que des géométries non euclidiennes sont parfaitement légitimes.[242]

Diesen zweiten Aufsatz von Lechalas hat Hausdorff später – wohl erst nach seiner Rezeption der Hilbertschen Axiomatik – gelesen und kommentiert. Er notierte sich dazu unter anderem:

> Ganz falsch, mit Lechalas (Rev. phil. 1890, t. 30, p. 164) zu sagen, dass die allgemeine Geometrie keine Postulate brauche. Das ist ein Missverständnis der Riemannschen Richtung, den Raum rein quantitativ zu betrachten. Um Raumgrössen der Arithmetik zu unterwerfen (von der man allein in gewissem Sinne sagen kann, dass sie keine Axiome brauche), bedarf es einer Menge Axiome, über Congruenz, „zwischen“, usw.[243]

Auch die strittige Frage, ob und wie das Parallelenpostulat mit der erkenntnistheoretischen Frage nach den Grundlagen der Geometrie zusammenhing, hielt Hausdorff für abwegig:

---

[240]Vgl. [Lechalas 1890]; in diesem Text, der bereits ausführlich auf die erste Kritik Renouviers in der *Critique philosophique* von 1889 reagierte, fasste Lechalas seine Position noch einmal prägnant zusammen.

[241]Vgl. [Renouvier 1891], S. 3; auch dieser Text, der sowohl auf Calinon als auch auf Lechalas reagierte, gehört bereits in die zweite Runde der Auseinandersetzungen.

[242][Lechalas 1890], S. 163.

[243]NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 10.

> Mir wird es immer unbegreiflicher, wie die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms zu der Frage, ob Apriori oder Erfahrung, in Beziehung stehen soll. Ob zur logischen Fixirung unseres Raums [ein] Axiom mehr oder weniger nothwendig ist, berührt die erkentnistheor[etische] Frage gar nicht. Es war eben schon von Kant eine Vermischung zweier Fragen, als er die Gewissheit der Mathematik mit der Natur unserer Raumanschauung in Beziehung brachte.[244]

Die Diskussion zwischen Lechalas und Renouvier wurde im Jahr 1893 im ersten Band der neu erschienenen *Revue de métaphysique et de morale* durch zwei Beiträge Louis Couturats kommentiert, die auch Lechalas noch einmal zur Reaktion brachten. Nach einer ausführlichen Wiedergabe der Thesen von Renouviers zweitem Artikel[245] verteidigte Couturat Calinons Ansichten gegen die Angriffe Renouviers, wobei er seine Leser vor allem auf eine inzwischen erschienene kurze Stellungnahme von Henri Poincaré in den einschlägigen Debatten aufmerksam machte.[246]

In diesem kurzen, aber für spätere Diskussionen wichtigen Text hatte Poincaré Beltramis Interpretation der hyperbolischen Geometrie vorgestellt und durch die Idee einer Übersetzung erläutert: Anhand eines Lexikons konnten Ausdrücke der zweidimensionalen „Lobatschewskischen“ Geometrie in passende Termini der euklidischen Geometrie überführt werden, um so deren Beltramische „Interpretation“ zu gewinnen. In dieser entsprach jeder Aussage der hyperbolischen Geometrie eine Aussage der „gewöhnlichen“, euklidischen Geometrie. Insbesondere war durch diese Übersetzung gezeigt, dass die nichteuklidische Geometrie ebenso widerspruchsfrei denkbar war wie jene:

> Ainsi, quelque loin que l'on pousse les conséquences des hypothèses de Lowatchewski, on ne sera jamais conduit a une contradiction. En effet, si deux théorèmes de Lowatchewski étaient contradictoires, il en serait de même des traductions de ces deux théorèmes, faites a l'aide de notre dictionnaire. Mais ces traductions sont des théorèmes de géométrie ordinaire et personne ne doute que la géométrie ordinaire ne soit exempte de contradiction.[247]

Außerdem hatte Poincaré kurz auf den noch allgemeineren Begriff der Geometrie bei Riemann hingewiesen, um dann abschließend zur Frage der Natur der geometrischen Axiome Stellung zu nehmen: Sie waren, wie Poincaré in dieser frühen Fassung seiner Ansichten formulierte, weder synthetische Urteile a priori noch empirische Tatsachen, sondern „Konventionen“ oder „verkleidete Definitionen“.[248]

Diese Auffassung stand, wie Couturat notierte, derjenigen Calinons nahe. Im Vorbeigehen verwies Couturat auf die epistemologische Verwandtschaft der

[244] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 10.
[245] [Couturat 1893a], S. 75-70.
[246] Couturat bezog sich auf [Poincaré 1891]. Eine leicht veränderte Fassung dieses Aufsatzes findet sich in [Poincaré 1902a], S. 49-67.
[247] [Poincaré 1891], S. 771.
[248] Ebd., S. 773.

Diskussion über das Parallelenpostulat mit der über die Frage der Dimensionenzahl des Raumes. Auch hier ändere die Frage, ob es sich um eine empirische Tatsache oder ein Urteil a priori handele, nichts an der Möglichkeit, auch über Räume beliebiger Dimension nachzudenken:

> Que notre intuition soit empirique ou a priori, il n'en est pas moins vrai que le nombre des dimensions de l'espace s'impose à notre esprit à la manière d'un fait donné, et qu'il n'y a pas de raison pour que ce nombre soit 3 plutôt que 2 ou 4. Bien mieux: quel que fût ce nombre n, il y aurait toujours une raison pour concevoir un espace à $(n+1)$ dimensions, que par hypothèse on ne pourrait imaginer, et cela, pour se rendre compte analytiquement des propriétés de l'espace à n dimensions dont on aurait l'intuition.[249]

Eine eng verwandte Haltung findet sich später bei Hausdorff wieder.[250]

In seiner zweiten Notiz suchte Couturat die Unklarheit bei Lechalas aufzuklären, welche die „Homogenität" des Raumes betraf. Dabei sortierte er mehrere miteinander verbundene Fragen: (a) Ist ein „espace" homogen, d.h. lässt er Ähnlichkeitstransformationen zu bzw. genügt er, wie Couturat nun mit Lechalas formulierte, dem „principe de relativité"?[251] (b) Lassen sich die Figuren eines geometrischen Raums durch Abbildung in einen anderen geometrischen Raum winkeltreu vergrößern oder verkleinern? (c) Lassen sich alle dreidimensionalen Räume in einen vierdimensionalen, homogenen (Euklidischen) Raum einbetten, so dass die Abbildungen (b) innerhalb desselben vierdimensionalen Raums möglich sind? Dies waren mathematische Fragen; hingegen waren folgende Fragen erkenntnistheoretischer Natur: (d) Wären einander geometrisch ähnliche Welten für uns unterscheidbar? (e) Welche Geometrie trifft auf unseren (sinnlich wahrgenommenen) Raum zu? Couturat wies darauf hin, dass die Ideen von Lechalas zu einer „géométrie générale" sich auf die in (c) beschriebene Situation bezogen, und dass deshalb das von ihm behauptete allgemeine „principe de relativité" nur im dort angenommenen vierdimensionalen Raum galt, nicht jedoch in den nichteuklidischen Räumen der Dimension drei, wenn man diese für sich betrachtete. Darüber hinaus kritisierte er die Überzeugung von Lechalas, dass unsere Sinne uns die Möglichkeit der winkeltreuen Vergrößerung oder Verkleinerung geometrischer Figuren beweise und daher der Raum homogen sein müsse:

> Comment peut-on espérer fonder l'uniformité de l'espace sur la permanence apparente de nos sensations, qui sont choses essentiellement fugitives et muables? Et n'est-ce pas plutôt parce que la raison postule l'uniformité de l'espace et l'immutabilité (au moins relative) des corps,

[249] [Couturat 1893a], S. 72 f.

[250] Vgl. Abschnitt 4.3.1.

[251] [Couturat 1893b], S. 306. Dieses auf die Existenz von Ähnlichkeitstransformationen in einem Raum bezogene „Relativitätsprinzip" muss natürlich von dem späteren, physikalischen (speziellen oder allgemeinen) Relativitätsprinzip Einsteins ebenso unterschieden werden wie von der älteren Diskussion über die absolute oder relative Natur des Raumes.

> que nos sensations prennent sous nos yeux une consistance fictive et une identité illusoire?[252]

Das Ziel seines Beitrags war demgegenüber, zu zeigen, dass die recht missverständlich als „principe de la relativité de l'espace" bezeichnete Annahme der Homogenität des Raumes kein empirisches, sondern ein rationales, angenommenes Postulat war, welches die Euklidische Geometrie unter den anderen dreidimensionalen Geometrien konstanter Krümmung auszeichnete.

Die zuletzt berührte Frage der „Homogenität" des Raumes wurde in den Beiträgen zur beschriebenen Debatte immer wieder aufgegriffen. Eine besonders imaginative und zeitgenössisch mehrfach diskutierte Präsentation dieses Themas stammt aus der Feder des Philosophen und experimentellen Psychologen Joseph Delbœuf. Dieser hatte seine akademische Laufbahn zunächst in Liège begonnen und dann in Bonn bei dem damals dort als Privatdozenten tätigen Friedrich Ueberweg fortgesetzt. Bereits zu dieser Zeit hatte er auch ein erstes Werk über die Grundlagen der Geometrie publiziert, die *Prolegomènes philosophiques de la géométrie*. Darin hatte Delbœuf in Anknüpfung an und Auseinandersetzung mit Ueberwegs „ideal-realistischer" Konzeption des Raumes eine noch stärker empirisch orientierte Philosophie der Geometrie vorgestellt, nach welcher diese „die Bestimmungen oder idealen Figuren des Raumes" zum Gegenstand hatte; der Raum selbst war dabei jedoch als ein Bereich des Wirklichen verstanden, wie dies auch für die Gegenstandsbereiche anderer empirischer Wissenschaften der Fall war.[253] Später wandte Delbœuf sich unter dem Einfluss Theodor Fechners und zeitgenössischer Heilpraktiken der Psychophysik und der Hypnose zu; sein Interesse an den Grundlagen der Geometrie erlosch jedoch nicht. Auf den Spuren des Baerschen Vergleichs verschiedener biologischer Spezies und anknüpfend an die Literatur des 18. Jahrhunderts (namentlich Swifts Erzählungen von *Gullivers Reisen* und Voltaires *Micromégas*) faszinierte ihn insbesondere die Frage der Wahrnehmung der Welt durch Lebewesen verschiedener Größe.[254] Schon vor Beginn des geschilderten Hin und Her zwischen Calinon, Lechalas, Renouvier, Poincaré, Couturat und anderen veröffentlichte Delbœuf eine kleine Skizze über *Nains et géants*, die diesen Gedanken durchspielte. Einer der wichtigsten Aspekte der unterschiedlichen Sinneswahrnehmung großer und kleiner Lebewesen, so argumentierte er, war dabei deren Wahrnehmung von Kraft bzw. der gegen eine physikalische Kraft geleisteten Arbeit.[255]

Nun, in den 1890ern, griff Delbœuf die seit Laplace immer wieder diskutierte Frage der Wahrnehmbarkeit einer gleichzeitigen Vergrößerung oder Verkleinerung der Welt auf und suchte in einer direkt auf Voltaires *Micromégas* anspielenden Schrift mit dem Titel *Mégamicros* gegen die von Laplace, Helmholtz

---

[252] [Couturat 1893b], S. 309.

[253] Vgl. [Delbœuf 1860], S. 73; dem Buch war eine von Delbœuf übersetzte Fassung der Habilitationsschrift Ueberwegs beigegeben. Zu Ueberweg vgl. 2.3.6.

[254] Vgl. Abschnitte 2.2.1 und 2.3.1.

[255] Vgl. [Delbœuf 1883]. Eine englische Übersetzung „Dwarfs and Giants" erschien noch im selben Jahr im *Popular Science Monthly*.

und anderen vertretene These von der Nichtwahrnehmbarkeit einer simultanen Vergrößerung oder Verkleinerung der Raumdimensionen zu zeigen, dass diese eben wegen der unterschiedlichen Wahrnehmung der physikalischen Kräfte und der geleisteten Arbeit doch sinnlich wahrnehmbar wäre. Dabei stützte er sich auf die Fiktion einer anderen, „Mars“ genannten Welt, in welcher alle räumlichen Dimensionen auf die Hälfte verkleinert waren, in der aber weiterhin das Newtonsche Gravitationsgesetz galt.[256] Seine Schlussfolgerung war, dass der tatsächliche, mit physischem Inhalt erfüllte Raum nicht wie der von physischem Inhalt abstrahierte, rein geometrische Raum homogen war. Delbœuf unterstrich damit, Helmholtz nicht unverwandt, dass die Frage der Wahrnehmbarkeit fiktiver räumlicher Transformationen nicht allein geometrisch und mit Bezug auf das zentralperspektivische Sehen, sondern nur unter Berücksichtigung physikalischer und biologischer Aspekte sinnvoll zu führen war. Spätere Autoren, die zu ähnlichen Fragen Stellung nahmen, unter ihnen Poincaré, Calinon und Hausdorff, folgten ihm hierin.

An dieser Stelle sei der kurze Blick in die französischsprachige Diskussion der 1890er Jahre über den Raum abgebrochen. Alle Beteiligten und andere ließen weitere Beiträge folgen, in denen sie aufeinander reagierten und ihre jeweiligen Standpunkte weiter entfalteten.[257] Sie zeigen, wie tief die epistemologische Irritation reichte, die durch die neuen Geometrien verursacht war, und wie unübersichtlich das Feld zwischen den Grundlagen der Geometrie und der Physik sowie der Biologie und Psychologie der Wahrnehmung inzwischen geworden war.

Das galt auch für das zweite Thema, das Hausdorff interessierte, die Zeit. Wieder gab Auguste Calinon einen wichtigen Anstoß. Im Jahr 1885 veröffentlichte er eine *Étude critique de la méchanique*, in welcher er sich gegen die Vorstellung einer empirischen Rechtfertigung der Mechanik wandte und zu zeigen suchte, dass die Mechanik eine rein exakte Wissenschaft, ja ein Teilgebiet der Geometrie war.[258] Dafür unterwarf er geläufige Definitionen der Grundbegriffe der Mechanik (darunter Zeit, Raum und Kraft) einer kritischen Analyse. Gegen ein empirisches Verständnis der gleichförmig verstreichenden Zeit wandte er ein, dass eine empirische Definition „gleicher Zeitintervalle“, in welchen sich bestimmte physische Vorgänge wiederholten, problematisch war, da sie die Zeitvorstellung von unseren (menschlichen) Sinnen abhängig machte:

> Dans l'univers, les positions successives des mobiles se révèlent à nous par l'intermédiaire des sens; c'est ainsi, par exemple, que nous voyons les divers positions des astres lumineux; chaque position correspond donc pour nous à une sensation, de sorte que la simultanéité et la successivité des positions ne sont pas autre chose que la simultanéité et la successivité des sensations correspondantes centralisées et comparées entre elles par notre cerveau. L'idée même du temps est donc inhérente au mode de

[256] Vgl. [Delbœuf 1893]. Auch diese Abhandlung wurde rasch ins Englische übertragen, vgl. [Delbœuf 1894].

[257] Eine genaue Studie dieser Debatten wäre in vielen Hinsichten lohnend und hilfreich.

[258] Vgl. [Calinon 1885].

> fonctionnement de notre cerveau et n'a de sens que pour des esprits faits comme le nôtre.[259]

Demgegenüber müsse die Zeit schlicht als ein quantitativer Parameter in der Beschreibung der mechanischen Bewegungen verstanden werden, der bei bestimmten Annahmen diese Beschreibungen in eine besonders günstige Form brachte – z.B. so, dass der Flächensatz bei Bewegungen unter Zentralkräften galt, wie Newton das am Beginn seiner *Principia* dargelegt hatte. Diese Annahmen waren aber theorieinterne, nicht empirische Festlegungen. Würde etwa (wie in unserem Alltag) die Erdrotation als empirisches Maß der Zeit zugrundegelegt, so würde sich angesichts des Standes der Wissenschaft herausstellen, dass diese (aufgrund ihrer allmählichen Veränderung) gerade nicht zu den Beschreibungen der Himmelsmechanik passe.[260] Konsequenterweise müsse man die Zeit als ein rein mathematisches Konzept innerhalb der Mechanik auffassen:

> Remplaçons l'univers matériel tel que nous l'observons par un système de points géométriques et substituons au fait de la simultanéité une loi de correspondance géométrique entre les positions diverses des points mobiles; dès lors le problème, aussi bien dans ses données que dans sa solution, appartient aux mathématiques pures.
>
> Cette observation a, au point de vue philosophique, une importance capitale, car elle nous fait prévoir, dès le début, une mécanique purement géométrique, indépendante de toutes données empruntées au monde matériel et par conséquent de l'existence même de ce monde matériel.[261]

Für ein philosophisches Publikum wiederholte Calinon derartige Überlegungen kurze Zeit später auf den Seiten der *Revue philosophique*.[262] Dabei betonte er den Wert einer vollständigen Geometrisierung der Mechanik und einer rein theoretisch motivierten Erklärung ihrer grundlegenden Begriffe: Sie erlaube, alle diese Begriffe frei von jeder Metaphysik zu fassen:

> La méthode que nous venons d'exposer a d'abord cet avantage d'introduire en mécanique la mesure du temps et la force par des définitions nettes et précises soustraites à toute idée préconçue, à toute opinion métaphysique. Mais, de plus, cette méthode est pour notre esprit un véritable affranchissement, car elle nous laisse absolument libres de choisir notre mesure de temps, de façon à donner au problème de mouvement que nous étudions sa solution la plus simple et la plus élégante.[263]

Ähnlich wie seine Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie fand auch Calinons Plädoyer für eine metaphysikfreie, auf einer theorieinternen Wahl beruhenden

[259] [Calinon 1885], S. 6 f.
[260] Eine ganz ähnliche Kritik an einem empirischen Verständnis der Zeitmessung nahm später Poincaré in seinen Aufsatz „La mésure du temps" [Poincaré 1898] auf, nachdem es schon 1886 zu einem direkten Kontakt zwischen den beiden gekommen war, vgl. [Walter 2007], S. 122-125.
[261] [Calinon 1885], S. 10.
[262] Vgl. [Calinon 1887].
[263] Ebd., S. 295 f.

Definition der Zeit rasch philosophische Kritiker, wie die folgenden Ausgaben der *Revue philosophique* belegen. Auf die Seite Calinons wiederum stellte sich u.a. der Philosoph und Mathematikhistoriker Paul Tannery, der die Konventionalität der Wahl der zur Zeitmessung verwendeten Bewegung verteidigte: wir suchen nach der einfachsten Form der Naturgesetze.[264]

Calinon selbst ging über dieses Argument noch hinaus. Auf der Basis seines rein mathematisch-geometrischen Verständnisses der Mechanik entwarf er in bemerkenswerter Originalität die Idee einer Kinematik mit zwei- oder dreidimensionaler Zeit. In seiner 128 Seiten umfassenden Schrift *Étude de cinématique à deux et à trois dimensions* verallgemeinerte Calinon kinematische Begriffe (insbesondere den der Geschwindigkeit) auf den Fall eines „mobile M“, d.h. eines beweglichen Punktes, dessen räumlicher Ort von einem „point T du temps“ bestimmt war, der sich seinerseits in einer Ebene oder in einem dreidimensionalen Raum befand.[265] Mithilfe differentialgeometrischer Konzepte für Abbildungen zwischen mehrdimensionalen Räumen konnte dann z.B. der Begriff eines „Geschwindigkeitsellipsoids“ für einen beweglichen Punkt mit dreidimensionaler Zeit gebildet werden, usw.

Calinons Idee eines mehrdimensionalen Zeitparameters und einer darauf gegründeten Kinematik war ebenso neu wie ungewohnt. Sofern die philosophischen Zeitgenossen sie überhaupt wahrnahmen, trug sie sicherlich dazu bei, den Ruf Calinons als einen mathematisches Gedankenspielers zu befestigen. Interessanterweise wies der mit philosophischen Kommentaren ansonsten durchaus vorsichtige Calinon schon zu Beginn seiner Schrift auf eine mögliche Bedeutung seiner mehrdimensionalen Kinematik für andersartige Bewusstseine an:

> Il va de soi d’ailleurs que cette cinématique nouvelle est, comme la cinématique ordinaire, une géométrie pure, la variable commune dont nous venons de parler n’ayant pas de lien nécessaire avec la notion métaphysique du temps; tout au plus pourrait-on dire que cette cinématique à deux ou trois dimensions serait réalisée dans le monde matériel pour des esprits faits autrement que le nôtre auxquels le temps apparaîtrait, comme l’espace, sous la forme d’une grandeur à deux ou à trois dimensions.[266]

Auch Calinon dachte also im Rahmen der Vorstellung, dass für verschiedenartige Bewusstseine die Welt auf je eigene, formal möglicherweise sehr verschieden strukturierte Weise „erscheinen“ konnte. Wir werden diesen Gedanken – ebenso wie jenen einer mehrdimensionalen Zeit – wenige Jahre später bei Hausdorff wiederfinden.[267]

[264]Vgl. [Tannery 1888]. Zu den Gegnern gehörte der Ingenieur Georges Vandame; die Diskussion dauerte zumindest bis ins Folgejahr, in dem Vandame einen Brief an den Herausgeber der *Revue philosophique* gegen Tannery und Calinon verfasste: es gebe nur eine wahre Zeit in der Mechanik, nicht viele verschiedene. Tannery antwortete kurz und erklärt die Diskussion für beendet (mit Dissens).

[265]Vgl. [Calinon 1890].

[266]Ebd., S. 3.

[267]Vgl. insbesondere Abschnitt 3.3.

Gegen Ende der 1880er Jahre entstand neben derartigen, stark auf die Mathematik und Mechanik bezogenen Diskussionen der Zeit eine weitere zeittheoretische Reflexion, welche die späteren Diskussionen sehr stark beeinflussen sollte, und die mathematischen Spekulationen wie jenen Calinons scharf entgegengesetzt war. Henri Bergsons später viel gelesene Dissertation *Essai sur les donnés immédiates de la conscience* von 1889 stellte den naturwissenschaftlichen Konzeptionen der Zeit eine Philosophie des erlebenden Zeitbewusstseins entgegen, die sowohl mit der neukantianischen Behandlung der in dieser Tradition „subjektive Zeit" genannten Thematik als auch mit der frühen Psychophysik und der experimentellen Psychologie des Zeitbewusstseins (von Fechner bis Delbœuf und Münsterberg) konkurrierte.[268] Zum Herzstück seiner Philosophie machte Bergson die Idee der „durée", in etwa: der erlebten Zeitdauer. Er suchte zu zeigen, dass der Hauptfehler bisheriger – auch der Kantianischen – Zeitanalysen darin lag, dass sie die Form „Zeit" nach dem Modell der Anschauungsform „Raum" gleichsam geometrisch dachten. Die traditionellen Zeitkonzepte seit Newton, in welcher die Zeit als eindimensionales homogenes Kontinuum aufgefasst war, waren für ihn illegitime oder zumindest problematische Übertragungen des Raum-Denkens auf das Zeiterleben, die in bestimmten Repräsentationsweisen der Zeit, nicht aber in den unmittelbaren Tatsachen des Zeitbewussteins mündeten.[269] Dieser Repräsentationsweise gegenüber stehe das organische Erleben von Gesamtheiten der inneren Zustände „unseres Ich":

> La durée toute pure est la forme que prend la succession de nos états de conscience quand notre moi se laisse vivre, quand il s'abstient d'établir une séparation entre l'état présent et les états antérieurs [...] comme il arrive quand nous nous rappelons, foundues pour ainsi dire ensemble, les notes d'une mélodie. [...] On peut donc concevoir la succession sans la distinction, et comme une pénétration mutuelle, une solidarité, une organisation intime d'éléments, dont chacun, représentatif du tout, ne s'en distingue et ne s'en isole que pour une pensée capable d'abstraire.[270]

Um die hier angestrebte Entgegensetzung von „reiner Dauer" und Raumkonzepten zu illustrieren, griff auch Bergson auf die Vorstellung eines „materiellen Punktes A", der sich entlang einer Linie bewegte, zurück:

> Si ce point prenait conscience de lui-même, il se sentirait changer, puisqu'il se meut: il apercevrait une succession; mais cette succession revêtirait-elle pour lui la forme d'une ligne? Oui, sans doute, à condition qu'il pût s'élever en quelque sorte au-dessus de la ligne qu'il parcourt et en apercevoir simultanément plusieurs points juxtaposés: mais par là même il formerait l'idée d'espace, et c'est dans l'espace qu'il verrait se dérouler les changements qu'il subit, non dans la pure durée. [...] Si notre point conscient A n'a pas encore l'idée d'espace, – et c'est bien dans cette hypothèse que nous devons nous placer, – la succession des états par lesquels il passe ne saurait revêtir pour lui la forme d'une ligne;

[268] Vgl. oben, Abschnitte 2.3.1 und 2.3.4.
[269] Vgl. [Bergson 1889], S. 68-75.
[270] Ebd., S. 75 f.

> mais ses sensations s'ajouteront dynamiquement les unes aux autres, et s'organiseront entre elles comme font les notes successives d'une mélodie par laquelle nous nous laissons bercer.[271]

Bergsons Intervention gab der Zeitdebatte einen entschieden bewusstseinstheoretischen Rahmen. Sie drängte auf eine Trennung der Zeitphilosophie von der des Raumes und tendierte ebenfalls zu einem Verzicht auf geometrische oder sonstige mathematische Beschreibung der Zeit, und sie pointierte weniger eine experimentelle Erforschung des Zeitempfindens als eine introspektive Phänomenologie der Zeit. Obwohl Hausdorffs Schriften keine ausdrücklichen Bezüge auf Bergson enthalten, kann doch die Frage gestellt werden, ob seine eigenen bewusstseinstheoretischen Erwägungen zum Zeiterleben nicht auch durch seine Rezeption der französischsprachigen Diskussionen mit geprägt waren. Da wir wissen, dass er die französischen Zeitschriften las, ist gut vorstellbar, dass er auch die dort an Bergsons Dissertation anschließende Auseinandersetzung mit dessen Ansichten zur Kenntnis nahm. So enthielt etwa der Jahrgang 1890 der *Revue philosophique* ausführliche Berichte sowohl über Hugo Münsterbergs ebenfalls 1889 in Freiburg erschienenen ersten Band der *Beiträge zur experimentellen Psychologie* als auch über Bergsons Dissertation. In seiner Besprechung zollte der junge Philosoph (und spätere Ethnologe) Lucien Lévy-Bruhl Bergson ein enthusiastisches Lob und hob den in der Tat zentralen Punkt der scharfen Kritik einer Parallelisierung von Zeit und Raum hervor. Auch in den späteren französischsprachigen Beiträgen zur Diskussion über die Zeit der 1890er Jahre spielten sowohl Bergsons als auch Münsterbergs Überlegungen immer wieder eine wichtige Rolle.

Ein besonderer Gesichtspunkt, der dabei sachlich auch für Hausdorff wichtig werden sollte, war die gerade durch Bergson unterstrichene Frage der kleinsten Einheiten und der beliebigen Teilbarkeit der erlebten Zeit einerseits, der wissenschaftlichen Zeitvorstellung andererseits. Eine ausführliche, wenn auch nicht allzu klare und stark durch theologische Erörterungen überformte Diskussion dieser Thematik trug Georges Lechalas in einer 1896 gedruckten Schrift *Étude sur l'espace et le temps* bei.[272] Anknüpfend an eine längliche Diskussion der Zenonschen Paradoxien versuchte er die Ideen indivisibler Zeitmomente und die beliebige Teilbarkeit der Zeit (und entsprechend auch räumlicher Kontinua) zusammenzudenken.[273] Wir werden sehen, dass Hausdorff später versuchte, in derartige Diskussionen über die kleinsten Einheiten der Zeit durch mengentheoretische Klärungen und eine axiomatische Analyse der Zeit etwas Licht zu bringen.[274]

Schließlich sei kurz über einen Artikel Calinons berichtet, den Hausdorff später gelesen hat, und dem er mindestens zwei wichtige Motive für seine eigenen erkenntniskritischen Überlegungen entnahm. Der Beitrag, 1893 in der

---

[271] Ebd., S. 77 f.

[272] [Lechalas 1896]. Die Schrift enthielt auch eine neue Fassung seiner oben bereits besprochenen Ideen über eine „géométrie générale “.

[273] Vgl. ebd., Kap. 5.

[274] Vgl. Abschnitt 4.3.2.

Revue philosophique publiziert, trug den Titel „L'indetermination géométrique de l'univers". Calinon knüpfte darin an die Schlussfrage seines früheren Aufsatzes „Les espaces géométriques" an, mit dem wir diesen Abschnitt eröffnet haben: wie viel ließ sich den vorliegenden empirischen Daten über die geometrische Struktur des Raumes entnehmen, und welchen Grad der Unbestimmtheit dieser geometrischen Struktur ließen diese Daten offen? Calinon erinnerte seine Leser zunächst daran, dass die optischen Daten der Astronomie und die weiteren Daten der terrestrischen Physik nur über einen winzigen Bereich des Universums einigermaßen genaue Daten lieferten, und dass selbst diese nur vorläufig sein konnten:

> Mais il est évident que l'ensemble des données fournies directement par l'expérience est chose essentiellement variable et dépend des progrès mêmes de la science. [...] Nous conclurons donc en disant que l'indétermination géometrique de notre espace comporte plusieurs dégrés, suivant l'état même de nos connaissances; ce sont ces divers degrés d'indetermination que nous allons successivement passer en revue.[275]

Hausdorff sollte die von Calinon betrachtete Form der Unbestimmtheit später den „Spielraum der Erfahrung" in der Bildung eines mathematischen Raumbegriffs nennen.[276]

Calinon begann seinen Durchgang durch die bestehenden Möglichkeiten mit einem anschaulichen Bild, das sich zunächst auf die visuelle (astronomische) Wahrnehmung des Kosmos bezog:

> Si d'un point unique pris comme observatoire on envisage l'espace visuel, en dehors toute comparaison avec l'espace tactile, on est amené à considerer cet espace visuel comme étant depourvu de profondeur et à l'assimiler à un espace à deux dimensions, c'est à dire à une surface.
>
> De même, ou plutôt reciproquement, dans un panorama, une simple toile de fond, avec un tracé adapté à la forme de cette toile peut nous donner les mêmes sensations visuelles qu'un objet à trois dimensions de l'espace ordinaire; on peut même varier à la fois, d'une façon correlative, et la forme de la toile et le tracé en question, de telle sorte que nous ayons devant nous la représentation de ce même objet a trois dimensions. Nous concluons de là que, l'observatoire réduit à un point, la surface susceptible de représenter l'espace visuel est de forme indéterminée.[277]

Mit anderen Worten: wurden allein die optischen Daten der Positionsastronomie betrachtet, so konnte aufgrund der lokal beschränkten Möglichkeiten der astronomischen Beobachtung so gut wie kein Schluss über die geometrischen Verhältnisse des Universums gezogen werden.

Nun war im terrestrischen Bereich freilich eine Koordination der optischen mit anderen, insbesondere taktilen Daten möglich, die zeigte, dass in diesem Bereich und innerhalb der Grenzen der Messgenauigkeit von der Geradlinigkeit der

[275] [Calinon 1893], S. 598.
[276] Vgl. Abschnitt 4.3.1.
[277] [Calinon 1893], S. 596.

Lichtstrahlen ausgegangen werden konnte. Wie andere vor ihm – Calinon verwies insbesondere auf Poincarés frühere Diskussionen dieser Problematik – betonte Calinon, dass eine Verallgemeinerung dieser Erfahrung zu der Annahme, dass Lichtstrahlen immer und überall geradlinig verliefen, nicht durch die Erfahrung gedeckt sondern vielmehr eine theoretische Hypothese war, die möglicherweise künftig revidiert werden musste. Sie war freilich möglich, und sie ließ sich vorläufig mit der Annahme eines euklidischen Raums als „représentation géométrique" des Universums vereinbaren. Aber sie beantwortete nicht die eigentliche Frage Calinons, welche eben den Grad der Unbestimmtheit dieser Darstellung betraf.

Der weitere Aufbau seines Artikels stellte dann verschiedene Varianten einer Bestimmung der geometrischen Struktur des Universums gegenüber. In allen Varianten ging Calinon davon aus, dass in der (mathematisch als infinitesimal klein gedachten) Umgebung des irdischen Observatoriums die euklidische Geometrie und die Geradlinigkeit der Lichtstrahlen galten, dass aber im Gesamtraum des Universums beide Aussagen preisgegeben wurden. Welche Transformationen der euklidischen Repräsentation des Raums in andere „représentations géométriques" waren denkbar, wenn gleichzeitig die Physik so verändert wurde, dass krummlinige Lichtstrahlen zugelassen wurden? Wie würde dieser Spielraum eingeschränkt, wenn diese Transformationen der Raumstruktur konform, oder konform und isometrisch, sein sollten (auch wenn solche zusätzlichen Bedingungen nicht streng empirisch gerechtfertigt werden konnten)? Diese Fragen führten in das Feld eines Riemannschen Verständnisses der Geometrie; Calinon verzichtete allerdings darauf, seine philosophischen Leser in allzu technische Gefilde zu führen. Seine epistemologische Schlussfolgerung war, dass

> l'espace dans lequel nous localisons ainsi les faits géométriques de l'Univers est indéterminé; c'est là un fait fondamental. [...] Ainsi, la physique et l'astronomie que nous connaissons ont été redigées dans la lange euclidienne, mais il doit être entendu que cela n'avait rien de nécessaire, le choix de cette langue se justifiant seulement par des raisons de simplicité et de commodité [...].
>
> Au fond, lorsqu'il s'agit des faits physiques et astronomiques de notre Univers, la simplicité ou la complexité sont bien moins dans ces faits eux-mêmes que dans notre esprit qui les observe et dans la façon dont nous les observons.[278]

Calinon verstand die so verbleibende Unbestimmtheit nicht als einen Mangel, sondern als einen Reichtum der geometrischen Forschung, der es möglicherweise erlaubte, künftige Kenntnisse des Universums auf andere als euklidische Weise am einfachsten zu repräsentieren und zu ordnen.[279]

[278] Ebd. S. 606 f.

[279] Zu Hausdorffs unmittelbarer Anknüpfung an diesen Text Calinons vgl. Abschnitt 3.4.

⋆

Das hier nur sehr knapp angedeutete Geflecht von Debatten über Zeit, Raum und Geometrie, die in den französischen Journalen der 1880er und 1890er Jahre geführt wurden, lieferte etliche Motive, die für Hausdorff später wichtig werden sollten. Vor allem der mathematischen Partei um Calinon, Poincaré, Couturat und Tannéry stand er nahe. Zugleich fanden sich in ihr Motive wieder, die Hausdorff bereits zuvor in seinen eigenen akademischen Studien kennen gelernt hatte: Eine kritische Auseinandersetzung mit Kant und den Kantianern sowie eine Verknüpfung bewusstseinstheoretischer Überlegungen mit der empirischen Psychologie der Zeit- und Raumwahrnehmung, die er während seines Studiums bei Hugo Münsterberg kennengelernt hatte.

In der mathematischen Partei zeichnete sich Calinons offen metaphysikkritische Exploration möglicher Formen von (ein- und mehrdimensionalen) Zeiten und Raumverhältnissen (wie einer zeitlich variablen Raumkrümmung oder die zuletzt betrachteten Transformationen des Raumes) durch eine besondere Imaginationskraft und Originalität aus. Wie Helmholtz unter den zum Empirismus neigenden Naturwissenschaftlern und Liebmann in der neukantianischen Tradition, so stand Calinon in der französischen Debatte jenen Überlegungen nahe, die Hausdorff später in seiner eigenen Erkenntniskritik von Zeit und Raum entfalten sollte.

3. Zwischen Metaphysikkritik und spekulativer Zeitphilosophie

Im folgenden sei nun knapp auf die eingangs erwähnten drei Phasen der Hausdorffschen Reflexionen über Zeit und Raum eingegangen. Die erste Phase umfasst die Vertiefung Hausdorffs in die Thematik, die vermutlich während seiner Studienzeit begann. Sie gipfelte in der unter dem Namen Mongré veröffentlichten Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* von 1898, in welcher ein komplexes Argument entfaltet wurde, das in einen „erkenntnistheoretische[n] Radicalismus“ mündete, der „zu einer vollkommenen Zersetzung unserer ‚kosmocentrischen‘ Vorurtheile geführt“ habe.[280] Mehrere Elemente dieser radikal erkenntniskritischen Position lassen sich unterscheiden und in seine intellektuelle Biographie einordnen.[281]

3.1 Das „Princip der indirecten Auslese“

3.1.1 Kant-Übungen

In seiner Studienzeit vertiefte sich Hausdorff – neben vielen anderen mathematischen und nichtmathematischen Studieninteressen – auch in die zeitgenössischen akademischen Diskussionen über die Philosophie Kants. Die genauen Stadien seiner Beschäftigung mit der Kantischen Erkenntniskritik, die schließlich in seiner ersten Publikation unter dem Pseudonym Paul Mongré endeten, sind uns nicht bekannt; sicher ist, dass er während seines Studiums wiederholt mit den damals weit verbreiteten Diskussionen um Kant und den Neukantianismus in Berührung gekommen ist, so etwa in einer einführenden Vorlesung des Leipziger Privatdozenten Hermann Wolff und in einer Vorlesung des Theologen und Philosophen Rudolf Seydel, welche die Beziehungen zwischen Philosophie, Theologie und Naturwissenschaft zum Thema hatten.[282] In solchen Vorlesungen ebenso wie im studentisch-akademischen Leben lernte Hausdorff auch damals breit diskutierte philosophische Kontroversen kennen. Dazu zählten nicht nur die Frage nach der Berechtigung der Metaphysik oder die ebenfalls verbreitete Diskussion über den Wert der Schopenhauerschen Ethik, sondern auch mehrere Facetten des unter den vagen Obertitel des „Raumproblems“ gestellten Fragenkomplexes. Dazu zählten u.a. die in früheren Abschnitten dieser

[280] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. VI.

[281] Für weitere biographische Ausführungen und eine philosophische Einordnung von *Das Chaos in kosmischer Auslese* sei auf die Materialien von Egbert Brieskorn und Werner Stegmaier in den Bänden IB und VII dieser Edition verwiesen.

[282] Hausdorffs Studienzeit wird ausführlich behandelt in HGW, Band IB, S. 83-111 und 176-192.

Einleitung behandelten Fragen der „Idealität“ bzw. „Realität“ des Raumes und die damals offenbar bis in Kneipenabende hinein diskutierte Frage der Skaleninvarianz der Raummessung (würden wir eine plötzliche Vergrößerung oder Verkleinerung aller Raummaße bemerken?).[283]

Im Sommersemester 1888 wechselte Hausdorff nach Freiburg, wo er u.a. den experimentellen Psychologen Hugo Münsterberg kennenlernte[284]; das folgende Wintersemester 1888/1889 verbrachte er in Berlin. Dort setzte Hausdorff seine Beschäftigung mit der Philosophie Kants fort. In seinem Nachlass finden sich Notizen über die „Übungen im Anschluss an die Kritik der reinen Vernunft“ des Neukantianers Friedrich Paulsen, dessen Schriften ihn als einen historisch orientierten Interpreten Kants ausweisen, der danach strebte, Kant in die Entwicklung der Philosophie vor und nach Kant einzuordnen, und der dabei auch nicht zögerte, Kants Schriften zu kritisieren, wo spätere Entwicklungen dessen Thesen in Frage stellten.[285] Nach seiner Ansicht war das Ziel der kritischen Philosophie Kants „die Begründung der Möglichkeit allgemein gültiger und notwendiger Erkenntnis in den Wissenschaften, besonders in der mathematischen Naturwissenschaft“, sowie „die Begründung der Möglichkeit eines metaphysischen Idealismus in der Weltanschauung“. Entscheidender „Beweisgrund“ für beide Ziele sei der „Phänomenalismus“, d.h. die These, dass die Gegenstände menschlicher Erkenntnis die in den „subjektiven Formen des Anschauens und Denkens“ gegebenen Erscheinungen sind, und nicht die Dinge „an sich“.[286] Auch Paulsen neigte dabei einer naturalisierten Form dieses Phänomenalismus zu, wenn er mit der durch Darwin geprägten Anthropologie des späten 19. Jahrhunderts davon ausging, dass die „körperliche Organisation, das Nervensystem“ ebenso wie unsere „intellektuelle Organisation“ „durch eine lange Reihe von Umbildungen“ evolutionär entstanden sei.[287]

In Hausdorffs Notizen findet sich ein längerer Abschnitt, der wahrscheinlich auf Paulsens mündliche Darstellung von Kants „transzendentaler Deduktion der Verstandesbegriffe“ in der *Kritik der reinen Vernunft* zurückgeht; der Aufbau der Notizen ist eng verwandt mit Paulsens späterer gedruckter Darstellung der Kantischen Philosophie.[288] Egbert Brieskorn hat darauf aufmerksam gemacht, dass aus der Handschrift der Notizen Hausdorffs Interesse an den Überlegungen der Übung deutlich hervorgeht, in der Tat finden sich an mehreren Stellen sehr deutliche Hervorhebungen (teils durch Unterstreichungen, teils durch größere Schrift).[289] So war der junge Hausdorff offenbar beeindruckt von Paulsens Betonung der Abhängigkeit der Wirklichkeitswahrnehmung von jener

---

[283] Vgl. zum ersten Punkt Abschnitte 2.1.2, 2.2.2, 2.3.3 und 2.3.4, zum zweiten Punkt insbesondere Abschnitt 2.3.7.

[284] Vgl. oben, Abschnitt 2.3.1

[285] Die wichtigsten Monographien Paulsens sind [Paulsen 1875], [Paulsen 1892] und [Paulsen 1898]. Die letzten beiden Werke wurden mehrfach neu aufgelegt.

[286] [Paulsen 1898], S. 116.

[287] Auf diesen Punkt macht auch Brieskorn aufmerksam, vgl. HGW, Band IB, S. 186.

[288] NL Hausdorff, Fasz. 1153, Blatt 4v-7; vgl. damit [Paulsen 1898], S. 165-179.

[289] Vgl. HGW, Band IB, S. 187-188.

Aktivität des menschlichen Verstandes, die Kant die „Synthesis des Mannigfaltigen" in der „Einheit der Apperzeption" nannte:

> Gäbe es keinen Verstand, so gäbe es für uns auch keine Natur, sondern nur ein „Gewühl von Empfindungen", eine Vielheit beziehungsloser und isolierter Eindrücke der Sinne. Dass wir die Wirklichkeit als eine einheitliche, von Gesetzen beherrschte Vielheit dauernder Dinge, als ein kosmisches Ganzes anschauen, das ist eine Folge nicht der Konstitution der Wirklichkeit an sich, sie mag nun eine einheitliche und gesetzmässige sein oder nicht, denn die Wirklichkeit an sich mit ihrer Gesetzmässigkeit wandert nicht in unsere Vorstellung über; es ist auch nicht eine Folge unserer Sinnlichkeit, die vielmehr uns lauter vereinzelte Elemente in jeder beliebigen Ordnung oder Unordnung zuführt: es ist vielmehr die That des Verstandes, der seine Einheit und Gesetzmässigkeit in die gegebenen Wahrnehmungselemente hineinträgt und dadurch die einheitliche Erfahrungswelt hervorbringt.[290]

In Hausdorffs Notizen findet sich folgende verwandte Passage:

> Die Erfahrung ist kein Gewühl von Erscheinungen, Wissenschaft kein Aggregat von Wahrnehmungsurteilen; sondern geordnetes und verknüpftes Ganzes. Man kann sich denken, dass die uns unbek. transcend. Structur der Dinge die synthet. spontane Apperzeption unterbräche; davon würde gar nichts im Bewusstsein bleiben; also bliebe das, was wir unter Welt verstehen, ungeändert. Ebenso Jahrmillionen lange Pausen in der Zeit.[291]

Wie wir bereits in Abschnitt 2.3.4 gesehen haben, fand sich das zuletzt genannte Motiv einer Unterbrechung des Zeitbewusstseins auch in Otto Liebmanns Diskussion der „transcendenten Realität" der Zeit. Es mag sein, dass Paulsen (und mit ihm Hausdorff) sich in der Übung auch auf Liebmanns Motiv bezogen hat, allerdings fehlt in Hausdorffs Notizen hierfür ein direkter Beleg.[292]

Es sollte angemerkt werden, dass in Paulsens gedruckter Fassung seiner Darstellung der „transzendentalen Deduktion der Verstandesbegriffe" der kritische Hinweis folgt, dass in seinen Augen „die ganze Beweisführung mitten entzwei" brach, da Kant einerseits darauf bestehe, dass der Verstand selbst die Gesetzmässigkeit in den Erscheinungen hervorbringe, andererseits in offensichtlichem Widerspruch hierzu einräume, dass „empirisch bestimmte" Gesetze wie das Newtonsche Gravitationsgesetz aus der Erfahrung entnommen sein müssen. Nach Paulsens eigener Meinung blieb hier nur die Wahl zwischen einem „reinen Rationalismus, der die ganze Physik für logisch konstruierbar und demonstrierbar hält", oder einem konsequenten „Empirismus", der sich darüber klar ist, dass alle Naturgesetze erst „allmählich durch die langsam fortschreitende

---

[290] [Paulsen 1898], S. 171 f. Das von Paulsen ungenau zitierte „Gewühl von Empfindungen" findet sich als „Gewühle von Erscheinungen" in Kants *Kritik der reinen Vernunft*, A 111.

[291] NL Hausdorff, Fasz. 1153, Blatt 6.

[292] Es lässt sich m.W. nicht genau belegen, wann Hausdorff sich zuerst mit Liebmanns Schriften befasst hat. In *Das Chaos in kosmischer Auslese* wird *Die Analysis der Wirklichkeit* ausdrücklich zitiert.

Arbeit des Verstandes entwickelt worden“ waren; Kants Versuch einer „Mittelstellung“ war letztlich unhaltbar.[293]

Hausdorff ist damit spätestens in Paulsens Übung offenbar mit zwei Motiven vertraut geworden, die in seinen späteren, eigenen Diskussionen der Kantischen Erkenntniskritik eine zentrale Rolle spielen sollten: Zum einen mit dem Gedanken, dass nur die Aktivität des synthetisierenden Bewusstseins dafür verantwortlich sei, dass wir „die Wirklichkeit als eine einheitliche, von Gesetzen beherrschte Vielheit dauernder Dinge, als ein kosmisches Ganzes anschauen“, zum anderen, dass Kants eigener „Beweis“ für diesen „transzendentalen Idealismus“ unzureichend war.[294] Auch auf welcher Seite der von Paulsen geschilderten Alternative er sich selber wiederfinden sollte, ist aus seinen eigenen Schriften klar. Dass Hausdorff sich während seines Semesters in Berlin weiter in Kant vertieft hat, wird auch durch seine im selben Nachlass-Faszikel überlieferten Exzerpte aus Kuno Fischers *Geschichte der Philosophie. Dritter Band: Immanuel Kant* belegt.[295]

3.1.2 Die Aphorismen „Zur Kritik des Erkennens“

Das eben genannte Motiv der Abhängigkeit der Wahrnehmung der Welt als eines geordneten Ganzen von der Aktivität des Bewusstseins, das Hausdorff während seines Studiums kennen gelernt hatte, erschien Hausdorff so gehaltvoll, dass er es in seiner ersten Publikation unter dem Namen Paul Mongré zum Gipfelpunkt einer längeren literarischen Erkundung machte. Sie findet sich im letzten Abschnitt der Aphorismen des Bandes *Sant' Ilario* unter dem Titel „Zur Kritik des Erkennens.“ Die Reihe der Aphorismen dieses Abschnitts beginnt mit der Frage, ob die philosophisch angestrebte „Enträthselung der Welt“ nicht dadurch geschehen müsse, dass das vermeintliche Rätsel der „allgemeinen Gesetzmäßigkeit der Welt“ als „nur ein scheinbares“ erkannt werden müsse, indem wir verstünden,

> dass wir eine blaue Brille tragen und uns unbändig verwundern, alle Dinge blau zu sehen,[296]

und sie gipfelt in der These, dass jedes einzelne Bewusstsein sich einen geordneten Kosmos aus einem „an sich“ unbestimmten und insofern möglicherweise willkürlichen Geschehen „erliest“:

> Bin Ich es nicht, der die tausend Nadeln der Pinie zusammenhält und aus Millionen Wellen ein Meer glättet? Continuität des Bewusstseins projicirt sich als Consistenz der Außenwelt; in dem regellosen Wirbel der Molecüle erliest sich das Subject sein Object, das Chaos wird durchgesiebt zum Kosmos.[297]

[293] Vgl. [Paulsen 1898], S. 177-179.
[294] Für die Zitate vgl. die vorige Seite.
[295] NL Hausdorff, Fasz. 1153, Blatt 21-24v.
[296] *Sant' Ilario*, Aphorismus 380.
[297] Ebd., Aphorismus 388.

Mongré erläuterte dieses „Durchsieben" des (transzendenten) Chaos zu einem vom Ich wahrgenommenen Kosmos durch die sprechende Metapher eines „unendlich vielstimmigen Orchesters", das „ungeleitet, disharmonisch durcheinander toben" könnte, während wir doch eine „wunderbare Vorrichtung in den Ohren" haben, „vermöge deren wir stets eine rhythmisch klare, rein harmonisirte Melodie vernehmen":

> Wie das? wir hören überhaupt nur, wenn jene *kosmische* Ausnahmemusik ertönt, alle übrige Zeit sind wir nicht allein taub, sondern existenzlos.[298]

Das bei Liebmann und Paulsen auftauchende Motiv einer möglichen Unterbrechung der Aktivität des Bewusstseins, während derer sich in der Welt „an sich" beliebiges ereignen könne, ohne dass wir uns dessen bewusst würden, findet sich hier weiter entfaltet in die Vorstellung einer Erzeugung von gesetzmäßiger Ordnung in der Wahrnehmungswelt durch ein nur fragmentarisch wahrnehmendes Bewusstsein. Im letzten Aphorismus des Bandes gibt Mongré dieser These einen Namen, der dann zum Titelstichwort seiner ein Jahr später veröffentlichten erkenntniskritischen Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* werden sollte:

> Um den Durchseihungsprocess, vermöge dessen aus einem transcendenten Zufallsspiel eine empirische Causalwelt herausfliessen kann, mit einem wissenschaftlichen Namen zu taufen, nennen wir ihn den *Process der indirecten Auslese* – in dem Sinne, wie die Biologie von indirecter Auslese spricht. Das will sagen, dass empirische Gesetzlichkeit, ebenso wie biologische Zweckmäßigkeit, nicht von vornherein als einziger Fall verwirklicht wurde, sondern nur schliesslich als einziger übrigbleibt, vermöge einer selectiven Vorrichtung, die alle davon abweichenden Fälle beseitigt. Diese selective Vorrichtung, diese ins Erkenntnistheoretische übersetzte Zuchtwahl heisst eben Bewusstsein [...]. Danach wäre die Gesetzlichkeit der Welt einfach darauf zurückgeführt, dass die zahllosen *abweichenden Fälle nicht registrirt* werden, eine Quelle, aus der ja jede Art Aberglauben Zufluss findet, der populäre, der wissenschaftliche, der philosophische![299]

Wie die Metapher des unharmonisch durcheinander tobenden Orchesters nahelegt, wird damit auch Zeit – und die Teilmengen der Zeit – zu einem zentralen Thema der Erkenntniskritik, auch wenn sich Mongré dagegen wehrt, die „indirecte Auslese" als einen *nur* zeitlichen Prozess zu verstehen: „ihre Function ist nicht zeitlich, sondern ontologisch zu denken: das Herauskrystallisiren des Kosmos aus dem Chaos vollzieht sich nicht im Sinne eines Verlaufs, sondern etwa einer rein mathematischen Elimination."[300] Die hier angedeutete Spannung zwischen der zeitlich zu verstehenden Metapher der „kosmischen Ausnahmemusik" und der „ontologisch" verstandenen Elimination der Unordnung aus unserer Wahrnehmung suchte Hausdorff in seiner zweiten Publikation unter

[298] *Sant' Ilario*, Aphorismus 408.
[299] Ebd., Aphorismus 411.
[300] Ebd.

seinem schriftstellerischen Namen Mongré durch eine wesentlich feinere Analyse der Zeitvorstellung aufzulösen, wie im nächsten Abschnitt skizziert wird.

Aber auch auf die seit Baer und Liebmann öfter verwendete Relativierung des Erkennens auf die biologische Organisation verschiedener Tiere greift Mongré zur Entfaltung seiner Thesen zurück:

> Genug: begreifen wir nur, wieviele Bewusstseinswelten neben einander hergehen und, durch die blosse Relativität von Zeit- und Raummass, aus dem Einen Stoffe geformt werden können, der uns als unsere Welt, dem Elephanten als seine Welt und der Mücke als ihre Welt erscheint.[301]

Im Vergleich zu den früheren Verwendungen des Motivs der Unterbrechung der Zeit bzw. der Variation des Zeitverlaufs sowie der Unterbrechung der transzendentalen Synthesis der Apperzeption (bei Paulsen) fallen einige Besonderheiten der Hausdorffschen Ausführungen auf. Zunächst deutet er das Motiv nicht als eine Aussage über verschiedene biologische Spezies, wie dies Baer und Liebmann taten, sondern als eine Aussage über verschiedene einzelne Bewusstseine. Die „indirekte Auslese" eines „Kosmos mitten im Chaos" ist

> wohlgemerkt, immer nur „subjectiv", nur für den Träger des Bewusstseins, für Niemanden sonst![302]

Und obwohl in Mongrés Aphorismen – wie auch in Nietzsches *Zarathustra* – Tiere und ihre Bewusstseine immer wieder eine große Rolle spielen (so vergleicht er die „Ameisen auf pfadlosem Waldboden, den jahrelang kein Mensch betrat" mit den Menschen und ihrer Welt, „auch in solch einem einsamen Winkel des Alls [...], den alle Jahrmyriaden irgendein gewaltsam tappender Tölpel von Gott betritt"[303]), so ist seine Deutung doch sehr viel individualistischer orientiert. Dieser erkenntniskritische Individualismus, der auch dem betonten ethischen Individualismus des *Sant' Ilario* – und sogar dem von Hausdorff gewählten literarischen Pseudonym – korrespondiert, ist sicherlich der Nähe des jungen Hausdorff zu Nietzsche geschuldet.[304]

Zweitens könnte man im Vergleich zu den Kants Transzendentalphilosophie verteidigenden Neukantianern fragen, ob die poetische Ausgestaltung einer Welt „an sich" als Chaos, aus welchem jedes individuelle Bewusstsein seinen eigenen Kosmos „ausliest", erkenntnistheoretisch nicht ebenso problematisch ist wie die traditionelle metaphysisch-realistische Annahme einer Übereinstimmung von Welt und Wahrnehmung. Wenn diese Annahme falsch und die Unterscheidung von „empirischer" und „transzendenter" Welt selbst fragwürdig ist, wie sinnvoll ist es dann, die transzendente, „absolute" Welt gewissermaßen umgekehrt als vollkommen chaotisch anzusehen? Hier darf freilich nicht übersehen werden, dass Mongré in seinem Aphorismenband kein zwingendes Argument,

[301] *Sant' Ilario*, Aphorismus 404.
[302] Ebd., Aphorismus 411.
[303] Ebd., Aphorismus 402.
[304] Zum Verhältnis Hausdorffs zu Nietzsche vgl. die Einleitung von Werner Stegmaier zu Band VII der Edition sowie in Band IB insbesondere die Abschnitte S. 258-284 und 373-407.

keinen „Beweis“ entfalten, sondern eben nur – aphoristisch – Möglichkeiten eines anderen Denkens nahelegen möchte. Mongrés Kritik an den vermeintlich zwingenden Argumenten der Philosophen ist deutlich:

> Geistreich, unterhaltend, bisweilen grandios sind höchstens die philosophischen Gedanken, die aufblitzenden und schon wieder verschwindenden Perspectiven, jene Plötzlichkeiten und Abgrundsblicke, die uns mitten im Nebel etwas vom Hochgebirge verrathen; aber der Nebel – die sogenannten Beweise – taugt nichts.[305]

Schließlich betrifft eine weitere Differenz zu Baer, Liebmann und Paulsen die bereits in Mongrés Erstling sehr markante Betonung der Rolle der Mathematik in der Kritik des Erkennens. Sie – und die mathematisch verfahrende Naturwissenschaft – lieferte dem Autor nicht nur weitere kräftige Metaphern und den Maßstab für die Qualität der *empirischen* Erkenntnis einer gesetzmäßig geordneten Welt, sondern sie erhielt ihrerseits eine wichtige Aufgabe für die Kritik des Erkennens:

> Uns fehlt eine Selbstkritik der Wissenschaft; Urtheile der Kunst, der Religion, des Gefühls über die Wissenschaft sind so zahlreich wie unnütz. Vielleicht ist dies die letzte Bestimmung der *Mathematik*.[306]

Im unmittelbaren Kontext der Aphorismen ist nicht ganz klar, was genau Hausdorff hier im Sinn hatte. Nur wenig später lenkt er den Blick der Leserinnen und Leser aber auf die Vorstellungen von Raum und Zeit und legt nahe, dass für beide eine grundlegende Relativität auf die Wahrnehmung der Welt durch ihre Bewohner besteht:

> Die Erkenntniss der Relativität alles Raummasses wird jeder nicht ganz bleischweren und pechzähen Intelligenz gelingen; man muss aber einen Schritt weiter dichten und auch für die Zeit solche Möglichkeiten offen lassen.[307]

Ein Teil des um diese Bemerkung kreisenden Aphorismus kann als direkte poetische Weiterführung der in Abschnitt 2.3.4 dargestellten Baerschen Fiktionen angesehen werden, wobei unklar ist, auf welchem Weg Hausdorff zuerst von denselben erfuhr. Mehrere mögliche Wege sind denkbar. Am wahrscheinlichsten ist eine Lektüre von Liebmanns *Analysis der Wirklichkeit*, die er ein Jahr später in *Das Chaos in kosmischer Auslese* ausdrücklich erwähnte. Auch über Nietzsche, der in seinen Baseler Vorlesungen über die vorplatonischen Philosophen ebenfalls auf die Ausführungen Baers zurückgegriffen hatte, diese aber ansonsten in seinen gedruckten Schriften nur implizit erwähnte,[308] oder dessen Umfeld könnte er davon erfahren haben. Die „Relativität allen Raummasses“ wiederum

[305] *Sant' Ilario*, Aphorismus 406.
[306] Ebd., Aphorismus 401.
[307] Ebd., Aphorismus 404.
[308] Die genaueste Studie dazu ist derzeit [Orsucci 1992], S. 203-2019; hier wird auch auf die Rolle Liebmanns als Vermittler zwischen Baer und Nietzsche hingewiesen. Vgl. außerdem [Small 2010], S. 86-91, sowie [Stegmaier 2018].

war ein viel diskutiertes Thema bereits in Hausdorffs Studentenzeit gewesen; vor allem die populären Schriften von Helmholtz wurden damals vielfach verhandelt.[309] Eine Analyse verschiedener mathematisch denkbarer Raum- und Zeitformen, so dürfte Hausdorff also schon bei der Abfassung seiner erkenntniskritischen Aphorismen vermutet haben, verhilft zu einer selbstkritischen Reflexion wissenschaftlicher Vorstellungen. Dies jedenfalls war der Weg, den er in der Folgezeit beschritt.

In *Sant' Ilario* beschränkte er sich vorerst auf eine knappe Auseinandersetzung mit Nietzsches Lehre von der ewigen Wiederkunft des Gleichen, namentlich mit dem Nietzsche zugeschriebenen „Beweis“ derselben, der, wie Mongré ausführte, auf der fehlerhaften Vorstellung basierte, „der Unendlichkeit der Zeit eine materialistisch gefasste Endlichkeit des Zeitinhalts gegenüberzustellen und daraus die nothwendige Wiederholung gleicher Zeitstrecken zu folgern.“[310] Das Argument, das Hausdorff schon einige Jahre vorher formuliert hatte, wie aus einem Brief des Jahres 1893 an den Freund Nietzsches und ersten Verwalter des Nietzsche-Archivs Heinrich Köselitz (Peter Gast) hervorgeht, ist an anderer Stelle der Edition näher diskutiert worden; es zeigt, dass Hausdorff zu diesem Zeitpunkt die Cantorsche Theorie unendlicher Mengen noch nicht näher kennengelernt hatte, und dass mithin auch das Motiv der Aufgabe der Mathematik als einer „Selbstkritik der Wissenschaft“ noch nicht in voller Tragweite durchdacht war.[311] Es sollte den Autor Mongré und den Mathematiker Hausdorff jedoch lange begleiten.

3.2 Das „Transformationsprincip“

Die erkenntniskritischen Aphorismen des *Sant' Ilario* deuten bereits eine Radikalisierung des Argumentierens mit fiktiven Variationen der Wahrnehmung von Raum und Zeit – ihrer Form ebenso wie ihres Inhalts – an, die wir in den früheren und zeitgenössischen Debatten über Zeit und Raum kennengelernt haben. In seiner Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* präzisierte Hausdorff diese Andeutungen und gab ihnen den Status einer systematischen Technik des erkenntniskritischen Argumentierens. Neben das bereits eingeführte „Prinzip der indirecten Auslese“ – das zum Titel eines eigenen Kapitels der Monographie wurde – trat dabei ein zweites argumentatives Verfahren, für welches Hausdorff den Namen „Transformationsprincip“ wählte. Im Text von *Das Chaos in kosmischer Auslese* finden sich mehrere Stufen seiner Erläuterung, und auch nach der Veröffentlichung des Werks beschäftigte Hausdorff sich weiter mit diesem Prinzip, wie die in diesem Band edierten Notizen belegen, die von Hausdorff in einer nach diesem Prinzip betitelten Mappe gesammelt hat.[312]

[309] Vgl. dazu Abschnitte 2.3.6, 2.3.7 sowie die biographischen Ausführungen in HGW, Band IB, S. 157-159.
[310] *Sant' Ilario*, Aphorismus 406.
[311] Vgl. dazu Purkert in der Einleitung zu HGW, Band II, S. 2-7, ferner Brieskorn in HGW, Band IB, S. 224-230.
[312] NL Hausdorff, Fasz. 1079; vgl. Abschnitt 3.6.1.

Bereits im einführenden Kapitel seiner Monographie stellte Mongré sowohl das Ziel seiner Überlegungen vor, wie auch das Verfahren, mit dem er es erreichen wollte. In der Beschreibung des Ziels stützte er sich zunächst auf die von Kant und seinen Nachfolgern gemachte Unterscheidung einer „für uns“, in unserem Bewusstsein gegebenen empirischen Welt und einer „an sich“, unabhängig von aller Erfahrung – und insofern „absolut“ – bestehenden, „transcendenten“ Welt. Anders als Kant wollte Mongré jedoch nicht den Weg der Transzendentalphilosophie gehen, d.h. nicht nach den notwendigen Bedingungen fragen, unter denen Erfahrung möglich wird.[313] Vielmehr suchte er in radikaler Form die Haltlosigkeit jeder positiven Aussage über die transzendente Welt zu erweisen:

> Wir werden die völlige Diversität beider Welten und die Unhaltbarkeit jedes Schlusses von empirischen Folgen auf transcendente Gründe (im weitesten Sinne) zu zeigen haben, und zwar in einer umfassenden Allgemeinheit, die über das Kantische Resultat auch praktisch hinausgreift und ausser der Ablehnung jedes metaphysischen Positivismus einen neuen Standpunkt zur Naturwissenschaft motivirt.[314]

Das Verfahren hierfür beschrieb er wie folgt:

> Es wäre nun die typische Form unserer Überlegungen abzugrenzen. Ich sagte, wir wollen den Realismus auf seinem eignen Felde schlagen, mit seinen eigenen Sätzen ad absurdum führen. Zu diesem Zweck greifen wir irgend eine unserer Bewusstseinswelt anhaftende Eigenschaft oder in ihr obwaltende Beziehung heraus, übertragen sie unverändert auf das absolut Reale und suchen sie dann, bei vorgeschriebener und festgehaltener empirischer Wirkung, möglichst stark umzuformen. Sobald uns das gelingt, haben wir was wir brauchen: [...] ein Exemplar einer Reihe von Eigenschaften, die wir *nicht* berechtigt sind, dem Realen an sich zuzuschreiben.[315]

Diese „Methode“ führte er in den folgenden Kapiteln zunächst für die mit der Zeit verbundenen Aspekte der „Bewusstseinswelt“ durch; in einem eigenen Kapitel „Vom Raume“ dann auch für die räumlichen. In diesem Kapitel griff Hausdorff aus der mathematischen Sprache seiner Zeit dann den Begriff der Abbildung und der Transformation auf, um sein argumentatives Verfahren anhand „einiger mathematischer Hülfsvorstellungen“ – und nun auch unter Bezugnahme auf Georg Cantors Mengenlehre – weiter zu erläutern. Ging Mongré zunächst davon aus, dass der empirisch erfahrene Raum sich mit dem „transcendenten“ oder absoluten Raum an sich deckt, so sollte nun derselbe „empirische Inhalt“ in einer „veränderten Weise“ im „transcendenten Raumgerüst“

[313] So vermied er insbesondere recht konsequent „das verhängnisvolle Wort ‘transcendental’, das seit Kants schwankendem Gebrauch [...] bis auf den heutigen Spiritismus mit seinen Astralleibern eine unmögliche Mittelstellung hat einnehmen müssen“, vgl. *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 3. Auch in der Ablehnung dieser „Mittelstellung“ traf sich Hausdorff mit seinem früheren Lehrer Paulsen, vgl. oben, 3.1.1.

[314] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 4.

[315] Ebd., S. 8.

vorgestellt werden, um deutlich zu machen, dass letzteres selbst für uns keine Bedeutung besitzt.

> Jeder veränderten Anordnung entspricht nun das, was man neuerdings eine Transformation oder Abbildung des einen Raumes auf den anderen nennt.[316]

In dieser Sprache – und unter Zuhilfenahme von zeitlichen und räumlichen Koordinaten – formulierte Mongré sein Argumentationsprinzip und seine Position in einem späteren Kapitel dann parallel für Zeit und Raum sowie für ihre Vereinigung:

> I. Transcendenter Idealismus der Zeit: in jedem Punkte der absoluten Zeit kann jeder Punkt der empirischen Zeit realisirt sein, t ist eine *beliebige* Function von τ oder umgekehrt.
>
> II. Transcendenter Idealismus des Raumes: in jedem Punkte des absoluten Raumes kann jeder Punkt des empirischen Raumes localisirt sein, xyz sind *beliebige* Functionen von $\xi\eta\zeta$ oder umgekehrt.
>
> III. Beide zusammen: die Zeitsuccession ändert sich beliebig von Raumpunkt zu Raumpunkt, die Raumstructur von Augenblick zu Augenblick. Hier sind alle vier Größen $xyzt$ *beliebige* Functionen der vier anderen $\xi\eta\zeta\tau$ oder umgekehrt; man gestatte die summarische Ausdrucksweise: in jedem transcendenten Raumzeitpunkte kann jeder empirische Raumzeitpunkt realisiert sein.[317]

Um den Charakter und die Tragweite der durch diese Passagen beschriebenen argumentativen Technik genauer einzuordnen, seien im Folgenden die wesentlichen Stufen ihrer Anwendung in *Das Chaos in kosmischer Auslese* etwas näher erläutert.

3.3 Empirische und transzendente Zeit

In dem im zweiten Kapitel dieser Einleitung skizzierten Feld von Diskussionen über die Zeit nimmt Hausdorff – oder, um genau zu sein, zunächst einmal Paul Mongré – einen bestimmten Platz ein. Ausgehend von der für viele Autoren des 19. Jahrhunderts maßgeblichen, durch Kant geprägten philosophischen Sprache teilte er mit Autoren wie Helmholtz, Calinon und Nietzsche (sowie den späteren Autoren des Wiener Kreises) eine entschieden antimetaphysische Haltung, wie nicht zuletzt das Kapitel „Gegen die Metaphysik“ in *Das Chaos in kosmischer Auslese* belegt. Mit Helmholtz, Baer, Otto Liebmann und, in jeweils anderer Weise, Bergson oder Münsterberg verband ihn wiederum das Motiv einer Überschreitung der Kantischen Bewusstseinsphilosophie in Richtung auf eine wissenschaftliche und philosophische Analyse des erlebenden bzw. erfahrenden Zeitbewusstseins. Was ihn jedoch in diesem Feld – jedenfalls kurz vor

[316] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 82. Die vorhergehenden Formulierungen finden sich auf S. 80 f.
[317] Ebd., S. 142.

und kurz nach 1900 – auszeichnete, ist vor allem ein mathematisches Motiv, das er aufgriff, und das ihm zum entscheidenden Werkzeug seiner Erkenntniskritik der Zeit wurde, nämlich die Cantorsche Theorie unendlicher Mengen und eine dadurch möglich gewordene neue Sprache. Sie erlaubte ihm nicht nur, in sehr viel radikalerer Weise als andere Autoren alternative Zeitformen durchzuspielen, sondern auch eine in mehreren Hinsichten radikale Pluralisierung des Zeitbewusstseins zu imaginieren.

Mongré ging dabei aus von einer mathematischen Repräsentation des naiven Verständnisses von Zeitverlauf und Zeitbewusstsein. Der Text legt nahe, dass ihm dabei insbesondere Otto Liebmanns Essay über „Subjective, objective und absolute Zeit" als Ausgangspunkt diente.[318] Wie Liebmann eröffnete Mongré seine Überlegung mit einigen Unterscheidungen, zunächst zwischen „Zeitinhalt und Zeitablauf". Zeitinhalt ist das, was ein erlebendes Bewusstsein in der Zeit erfährt, eine Folge von (wahrgenommenen, erfahrenen oder erschlossenen) Zuständen: die Vorstellung „einer continuierlichen Reihe von Weltzuständen, eines materialen Substrates der Zeit". Von diesem erlebten Zeitinhalt unterschied Mongré den Zeitverlauf, ein „rätselhafter formaler Prozess, durch den jeder Weltzustand die Verwandlungsfolge Zukunft, Gegenwart, Vergangenheit erfährt".[319]

Beides, Zeitinhalt und Zeitverlauf, konnte – zunächst noch ohne Verwendung präziser mathematischer Konzepte – als ein „einfach ausgedehntes", durch eine Relation von früher/später geordnetes „Continuum" repräsentiert werden, also z.B. durch eine Strecke oder Linie. Wie die geometrische „Zeitlinie" aus Punkten bestand, so der Zeitinhalt aus „Weltzuständen", die Mongré etwas vage als „erfüllte Zeitstrecken von der Länge Null" beschrieb. Davon unterschieden war die „leere Zeitstrecke von der Länge Null", der „Augenblick". „Unser zeitlich erlebendes Bewusstsein", so schrieb er, gibt uns einen Einblick in „erfüllte Zeitstrecken", niemals jedoch in einen einzelnen Weltzustand oder einen leeren Augenblick; diese bilden „dessen unerreichbare Nullgrenze".[320] Es ist auffallend, dass bereits hier eine ganze Reihe von mathematischen Begriffen mit topologischem Charakter ins Spiel gebracht wurde (Continuum, einfache Ausdehnung, Grenze), die Hausdorff hier nicht näher festlegte; dafür besaß er, wie er selbst an späterer Stelle anmerkte, noch gar nicht die definitiven Werkzeuge.[321]

Um in diesem Rahmen den Zeitverlauf zu beschreiben, griff Mongré wiederum auf eine „Hülfsvorstellung" (bei Liebmann: „Hülfsbegriff") zurück, die einer absoluten Zeit, in welcher der „Zeitinhalt als ruheartig beharrend", der „Zeitablauf als bewegungsartig sich abspielend gedacht wird".[322] Gestatten wir uns die heutige mathematische Symbolik, so können wir von einer Abbildung

$$A : T \to X$$

[318] Vgl. oben, Abschnitt 2.3.4.
[319] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 11.
[320] Ebd., alle Zitate S. 12.
[321] Vgl. unten, 3.4.
[322] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 13.

sprechen, die jedem Zeitpunkt t der absoluten Zeit T einen erlebten Weltzustand x_t zuordnet, dabei lasse ich vorerst offen, was X sein könnte (der „Inbegriff aller Weltzustände“? der Inbegriff aller möglichen Zeitinhalte eines erlebenden Bewusstseins?) da Mongré dazu zunächst nicht allzu viel sagte. Mongré nannte dies (und wiederum ist die Nähe zu Liebmann unübersehbar) die „Bewegung des Gegenwartpunkts“ auf der Zeitlinie. Diese Bewegung wäre so der Zeitverlauf; der in ihm erfasste Zeitinhalt wäre in dieser Symbolik der Bildbereich $A(T)$ der betrachteten Abbildung. Der naiven Zeitvorstellung entspricht dann die Annahme, dass die Zeitordnung der absoluten Zeit T ebenso wie die des Zeitinhalts $A(T)$ die eines linear geordneten Kontinuums wie jenes der reellen Zahlen ist.

Auch wenn Mongré ähnliche Vorstellungen in seinen Vorlagen gefunden hat (namentlich bei Liebmann), so waren sie in der Zeit doch nicht unumstritten; Henri Bergson etwa hatte, wie wir gesehen haben, in seiner Dissertation von 1888 heftig gegen solche Vorstellungen polemisiert.[323] Mit seiner Verteidigung der „durée“ gegenüber den „Zeitpunkten“ der geometrischen Veranschaulichung der Zeit berührte er die auch von anderen und von Mongré selbst notierte Schwierigkeit, die Begriffe Augenblick, Zeitpunkt oder auch Zustand genau zu fassen. Wir haben gesehen, dass Baer und die experimentellen Psychologen entschiedene Befürworter der Ausgedehntheit des Augenblicks, ja sogar des „punctum temporis“ waren.[324] Wie die oben zitierten Formulierungen zeigen, stellte Mongré sich Zustände (erfüllte Zeit) und Augenblicke (leere Zeit) vorläufig als nicht in der Wahrnehmung erreichbare Grenzwerte vor.[325]

Die formale Repräsentation eines Zeitverlaufs, die Mongré hier skizzierte, war der in der (klassischen, modern formulierten) Physik gebräuchlichen Zustandskurve eines physikalischen Systems ähnlich. Allerdings muss betont werden, dass Mongré damit nicht schlicht den realen Verlauf des Weltgeschehens in einem Zustandsraum zu beschreiben suchte, sondern die Zeitstruktur eines sich erfahrend durch die Welt bewegenden Bewusstseins (hierin stimmte er wiederum mit etlichen früheren Autoren der kantianisch-philosophischen wie der empirisch-psychologischen Tradition überein). Durch die analytische Trennung von Zeitinhalt und Zeitverlauf und durch das Motiv der „Bewegung des Gegenwartpunktes“ eröffnete Mongré jedoch die Möglichkeit, die Beziehungen der Zeit wesentlich radikaler als seine Vorgänger zu denken bzw. zu imaginieren. Im Rahmen dieser Repräsentation variierte Mongré nun, seinem argumentativen Verfahren entsprechend, schrittweise die beschriebene Struktur, bis vom naiven Verständnis des Zeitablaufs nichts mehr übrig blieb. Etwas vereinfachend lassen sich folgende Schritte seiner Argumentation unterscheiden:

[323] Vgl. Abschnitt 2.3.7.

[324] Vgl. Abschnitt 2.3.1.

[325] Es wäre interessant, näher zu untersuchen, wie sich Hausdorffs Vorstellungen über diesen Punkt im Lauf der Zeit wandelten. Die Frage taucht noch einmal auf in der von ihm später geführten Diskussion über „Momente“ der Zeit, vgl. unten, Abschnitt 4.3.2.

(1) Die Geschwindigkeit der Bewegung des Gegenwartpunkts auf der Zeitlinie könnte variieren. Manche Zustandsfolgen der Welt könnten von einer bestimmten Bewegung A schneller durchlaufen werden als von einer anderen B. Eben dies war ja Inhalt der Baerschen Fiktion gewesen, auf die Mongré am Beginn des entsprechenden Kapitels verwies (ohne Baer namentlich zu erwähnen).[326] Während allerdings Baer (und mit ihm Liebmann) auf Variationen abzielten, in welchen sich der Zeitinhalt ändern würde, und mit ihm das Weltbild des erlebenden Bewusstseins, fragte Mongré zunächst nur, ob sich eine Variation des Zeitverlaufs bei gleichzeitiger Festhaltung des Zeitinhalts bemerkbar machen würde (d.h. A und B durchlaufen dieselbe Zustandsfolge, bei Mongré: „Zeitstrecke t"). Seine erkenntniskritische Pointe war eine klare Verneinung dieser Frage. Das erlebende Bewusstsein hat keine Möglichkeit, zu erfahren, *welche* Bewegung seines Gegenwartpunktes den von ihm erlebten Zeitinhalt hervorbringt. Das Argument ist sehr schlicht und impliziert doch mehr als nur die Unerkennbarkeit der Geschwindigkeitsvariation in der Bewegung des Gegenwartpunktes: Die Zeitwahrnehmung, so Mongré, ist selbst Teil des *Zeitinhalts*, nicht des *Zeitverlaufs.*

> Da wir selbst aber, mit all unserem Bewusstseinsinhalt, dem Inbegriff aller Weltzustände, der Zeitlinie, eingegliedert sind, so hiesse das, dass durch die Vertauschung $A-B$ etwas in die Zeitstrecke t hineingekommen wäre, was vorher nicht darin war.[327]

Im Grunde, meinte Mongré, war damit alles wesentliche gesagt:

> Der Gegenwartpunkt bewegt sich auf der Zeitlinie in ganz beliebiger, stetiger oder unstetiger Weise. Die transcendente Succession der Weltzustände ist willkürlich und fällt nicht in unser Bewusstsein.[328]

Mongré bezeichnete diese Aussage als seinen „Fundamentalsatz" der Erkenntniskritik der Zeit. Die Annahme einer absoluten Zeit war daher eigentlich entbehrlich, da über sie nichts ausgesagt werden kann. Oder, wie er später in seiner Vorlesung *Zeit und Raum* schreiben würde:

> Strenggenommen muss alles, was wir von der Zeit aussagen, in eine Aussage vom Zeiterfüllenden umgedeutet werden, um überhaupt Sinn zu bekommen, um erfahrbar zu werden.[329]

Mongré brach allerdings an dieser Stelle seine Überlegungen nicht ab, und er verwarf auch nicht die hier eigentlich bereits wieder ad absurdum geführte Vorstellung der absoluten Zeit und mithin auch der Bewegung des Gegenwartpunktes, d.h. den Rahmen seiner formalen Repräsentation der Zeit. Vielmehr imaginierte er weitere Variationen, die hier nur knapp zusammengefasst seien; Mongré führte sie in den Kapiteln seines Buches in einer bilderreichen, poetischen Sprache detailliert weiter aus.

[326] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 15.
[327] Ebd., S. 17.
[328] Ebd., S. 16.
[329] *Zeit und Raum* S. 11. Vgl. hierzu Abschnitt 4.3.2.

(2) Dem vierten Kapitel seiner Monographie gab Mongré die Überschrift „Die Mehrheit der Gegenwartspunkte." Ziel des Kapitels war die Überlegung, dass Bewusstsein nur individuell gedacht werden kann, und dass man, sofern die Zeitlinie weiterhin als eine „gemeinschaftlich gültige Realität" aufgefasst werden sollte, „die Verschiedenheit der Individuen in die Gegenwartpunkte verlegen und jedem Individuum seinen eignen Gegenwartpunkt zuordnen" müsse.[330] Für mich bewegt sich der Gegenwartspunkt also gemäß einer Abbildung A, für ein anderes Bewusstsein (ein Mitglied einer anderen Spezies, oder schlicht für ein anderes mir bekanntes oder unbekanntes Wesen) könnte dies eine ganz andere Bewegung B sein. Auch davon, so Mongré, könnte ich nichts wissen, da mir nur mein eigener Zeitinhalt zugänglich ist. Es konnte also eine Pluralität von ebenso vielen Bewegungen von Gegenwartspunkten $A, B, C, ...$ durch den Zeitinhalt geben, wie es Individuen (Bewusstseine) mit Zeiterfahrung gab. Hierin lag insbesondere die Vorstellung eines Verzichts auf eine globale *empirische* Zeit, von individuellen Eigenzeiten, selbst wenn (vorläufig) an der Vorstellung *einer* absoluten Zeit festgehalten wurde. Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Bewegungen von Gegenwartspunkten waren unklar und unbekannt. So könnte beispielsweise der durchlaufene Bereich $A(T)$ einer Bewegung von dem Bildbereich $B(T)$ einer anderen Bewegung gänzlich verschieden sein.[331] Auch unendlich und sogar kontinuierlich viele Gegenwartpunkte hielt Mongré für denkbar, wie er farbenreich ausmalte[332] Das Problem anderer Bewusstseine in der Erfahrungswelt eines Bewusstseins fand ebenfalls einen Platz in Mongrés Ausführungen: die Pluralität verschiedener Bewegungen des Gegenwartspunktes ließ ohne Weiteres solche Begegnungen zu, ohne den „zeitlichen Ablauf [...] für alle Bewusstseinssubjecte als identisch anzusehen".[333]

(3) Kein Bewusstsein, so führte Mongré weiter aus, kann wissen, ob seine Präsenz in der absoluten Zeit T kontinuierlich gegeben ist oder nicht (ganz abgesehen davon, dass der Sinn des Wortes „kontinuierlich" in diesem Kontext unklar war). Es konnte aussetzen, in bestimmten Teilen der absoluten Zeit nicht wahrnehmen, nicht existieren – die von Liebmann und im Seminar bei Paulsen notierten Unterbrechungen der Zeit konnten für verschiedene Bewusstseine unterschiedlich sein. In den für ein Bewusstsein vorhandenen Lücken der absoluten Zeit konnten aber noch andere Bewusstseine existieren und sich auf ihre Weise durch den Zeitinhalt X bewegten. In der eingeführten formalen Repräsentation wäre dies dadurch darzustellen, dass jede Bewegung eines Gegenwartspunkts A nur auf einer Teilmenge T_A von T definiert zu sein braucht. Dadurch wurde auch die anfänglich gemachte Annahme, die absolute Zeit T habe die vertraute Ordnungsstruktur der reellen Zahlen, in Frage gestellt. Selbst bei der Annahme, dass jedes T_A ein Linearcontinuum ist, könnte T selbst doch auch eine umfassendere geordnete Menge sein, die lediglich (viele) Teilmengen des Ordnungstyps von reellen Intervallen besitzt.

330 *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 69.
331 Ebd., S. 58 f.
332 Ebd., S. 64 f.
333 Ebd., S. 68-71.

(4) Für jede einzelne Bewegung A des Gegenwartpunkts eines erfahrenden Bewusstseins durch den Zeitinhalt bräuchten aber auch die je eigene absolute Zeit T_A und die erlebte Zeit $A(T_A)$ keineswegs den Ordnungstypus von reellen Intervallen besitzen:

> Wir nehmen an, dass die Menge aller Zeitpunkte, die zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten liegen, von demselben Typus sei wie die Menge aller reellen Zahlen zwischen zwei gegebenen Grenzen, etwa zwischen 0 und 1. Aber warum könnte sie nicht von demselben Typus sein wie etwa die Menge aller rationalen Zahlen zwischen 0 und 1? Oder wie diejenige Menge, die nach Ausscheidung der letztgenannten aus der erstgenannten übrig bleibt, also die Menge aller irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1? Lauter Möglichkeiten, die sich nicht a priori abweisen lassen und jedenfalls zu erkennen geben, dass schon die elementaren Bestandteile des Zeitbegriffs einer „voraussetzungslosen Deduction“ spotten.[334]

Noch hatte Hausdorff keine mathematischen Werkzeuge, um alle denkbaren Möglichkeiten solcher Zeitordnungen zu skizzieren. Die Frage danach sollte ihn jedoch weiter begleiten.[335]

Den Grund dafür, dass trotz unserer subjektiven Wahrnehmung eines stetigen Zeitverlaufs weder die absolute Zeit noch die erfahrene Zeitlinie den Ordnungstyp reeller Intervalle haben musste, sah Mongré wiederum im Herzstück des anfänglichen Beweises seines „Fundamentalsatzes“ über die Zeit: Alle meine Erinnerungen, so Mongré, sind mir in dem Augenblick, in dem ich dies schreibe, gegenwärtig, und auch der erlebte Zusammenhang einer Zeitlinie mit Vergangenheit und Zukunft ist also eine je aktuelle Imagination des Moments:

> Nur in sich trägt das Zeitelement den Charakter des Kosmischen und eröffnet, in perspectivischer Verlängerung vor- und rückwärts, den Blick auf einen einheitlich zusammenhängenden Weltverlauf; dieser Weltverlauf braucht aber nicht thatsächlich abzurollen und jenes Element in seine Mitte zu nehmen.[336]

Dies war wiederum ein Motiv, das zu Mongrés Zeit auch bei anderen Autoren eine wichtige Rolle spielte, namentlich bei Bergson.

(5) Es ist – so Mongré weiter – schließlich auch durch nichts garantiert, dass verschiedene Bewusstseine sich durch *denselben* Zeitinhalt bewegen. Mit anderen Worten: Jede Bewegung A eines Gegenwartpunktes konnte ihren eigenen Zeitinhalt $A(T_A)$ (ihre eigene „Welt“, ihren, wie Mongré terminologisch fixierte, eigenen Kosmos) besitzen. Die frühneuzeitliche Figur der Pluralität der Welten erhielt hier einen neuen, individualistischen Sinn. Mongré veranschaulichte dies in vielen Details im siebten Kapitel von *Das Chaos in kosmischer Auslese* durch das metaphorisch gemeinte Bild einer *Zeitebene*, in der viele Zeitlinien (viele Bewegungen von Gegenwartpunkten verschiedener Bewussteine) neben einander oder durcheinander laufen. Abstrakter: Der Inbegriff X des gesamten

[334] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 191.
[335] Vgl. insbesondere Abschnitte 4.3.2 und 5.3.1.
[336] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 187.

Inhalts *aller* zeitlich erfahrenden Bewusstseine konnte daher konsequenterweise „zur beliebigen Mannigfaltigkeit von Weltzuständen" verallgemeinert werden, mit der einzigen, sich aus der Forderung der Konsistenz der Repräsentation ergebenden Bedingung, dass der Umfang, die Mächtigkeit sowohl von X als auch von T genügend groß waren, um alle Zeitinhalte darin unterzubringen.

Nehmen wir alle Schritte der von Mongré vorgenommenen fiktiven Variation des Zeiterlebens zusammen, enden wir bei einer unbestimmten Vielzahl von Abbildungen

$$A : T_A \to X\ ,$$

deren Definitionsbereiche T_A Teilmengen der Vereinigung T der absoluten Zeiten aller (ggf. unendlich, ja kontinuierlich vieler) Bewusstseine, und deren jeweilige Bildbereiche Teilmengen der Vereinigung X aller von diesen erlebten Weltzuständen darstellen würden. Alles wäre dabei denkbar: Beliebige (ggf. unendliche) Mengen, und beliebige Abbildungen zwischen solchen Teilmengen. Denkbar war diese Vielfalt, um es noch einmal zu betonen, weil jedes einzelne Bewusstsein in jedem Augenblick immer in seinem je eigenen Zeitinhalt befangen blieb.

Damit war eine Vorstellung erreicht, die Mongré erkenntniskritisch schlicht als Chaos bezeichnete. Im doppelten Chaos der absoluten Zeit (von der niemand irgend etwas wissen kann) und des Inbegriffs allen möglichen Zeitinhalts (von welchem jedes erfahrende Bewusstsein nur einen beliebig kleinen, aber u.U. beliebig schön geordneten, „kosmischen") Ausschnitt erfährt, bewegen sich die Gegenwartspunkte aller Individuen in völlig beliebiger Weise; dabei konnte keine Bewegung, auch keine beliebig unvorstellbare, diskontinuierliche oder repetitive, zerfahrene oder glatte ausgeschlossen werden, ebensowenig gab es eine Begrenzung der Imagination von Möglichkeiten der Berührung, Kreuzung, Überschneidung, Trennung, Disparatheit, Parallelität, Konvergenz oder Divergenz von Gegenwartpunktsbewegungen durch das Chaos der Welten und Zeiten. Jede Bewegung, so Mongré, schuf ihre eigene Zeitvorstellung, jedes Individuum las aus dem Chaos seinen eigenen Kosmos aus. Darüber stehende, vereinheitlichende Zeitkonzepte waren – so erfolgreich sie in den empirischen Wissenschaften auch sein mochten – metaphysisch sinnlos.

Daraus ergab sich für Mongré auch eine notwendige Kritik an allen metaphysischen Vorstellungen, die in der einen oder anderen Weise „von einer transcendenten Realität der Zeit" ausgingen.[337] Dieser Kritik war – unmittelbar im Anschluss an die Ausführungen über den „Fundamentalsatz" über die Zeit – bereits das unter den Titel „Gegen die Metaphysik" gestellte dritte Kapitel von *Das Chaos in kosmischer Auslese* gewidmet, was ihre Bedeutung unterstreicht. Es begann mit einer ausdrücklichen Erwähnung Otto Liebmanns, von dem Mongré, wie klar geworden ist, viele Motive aufgenommen hatte, der aber „die Zeitordnung, die Reihenfolge, die series conditionalis in der Causalkette der Realgründe und Effecte" als mögliches „objektives Residuum" einer unabhängigen Realität der Zeit hatte bestehen lassen, wie Mongré nun Liebmann

[337] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 24.

zitierte.[338] Auch dieses „Residuum“ einer metaphysischen Realität musste jedoch aufgelöst werden, zusammen mit der Vorstellung einer transzendenten Realität der „inneren Constitution und Verknüpfung der Weltzustände“.

Damit war „der Metaphysik Fehde angekündigt“. Besonderes Gewicht kam dabei dem Abweis jeder metaphysischen Vorstellung zu, in welcher zeitliche Entwicklung eine besondere Rolle spielte, also der von Mongré so genannten „genealogischen“ Metaphysik.[339] Nicht nur geschichtsphilosophische Ideen eines historischen Fortschritts oder auch eines fortschreitenden zivilisatorischen Niedergangs verfielen so der Kritik, sondern beispielsweise auch religiöse und ethische Vorstellungen, die auf der Idee einer künftigen Erlösung beruhten. Vor allem Schopenhauer und „das Hartmannssche Weltuntergangsdecret“ sollten hier getroffen werden.[340] Schopenhauer war zwar insgesamt eher ein Vertreter dessen, was Mongré die „ontologische Metaphysik“ nannte, das stellte „Schopenhauern hoch über Successionisten, Evolutionisten, Teleologen und sonstige Anbeter des absoluten Werdens.“ Aber auch bei ihm war „diese ontologische Gesamtauffassung vielfach durchbrochen; die augenfälligste Inconsequenz und Rückkehr zum genealogischen Realismus bezeichnet seine Erlösungsmoral“.[341] Auch Nietzsches Lehre von der „ewigen Wiederkunft“ verfiel, wenn sie metaphysisch verstanden wurde, grundsätzlich derselben Kritik. So konnte etwa, wie Mongré in einem drastischen Beispiel illustrierte, aufgrund der Willkürlichkeit der Bewegung des Gegenwartspunkts in der absoluten Zeit

> auf unsere Gegenwart, in der vielleicht eben ein Keilschriftbericht vom Schicksale [eines] Gefolterten ausgegraben wird, [...] in der absoluten Zeit unmittelbar die Folterung selbst in identischer Wiederholung folgen.[342]

Derartige Willkürlichkeit in der (absoluten) Zeitfolge moralisch zu beurteilender Ereignisse machte *alle* auf einer metaphysischen Zeitvorstellung beruhenden ethischen Überlegungen, seien sie pessimistisch, optimistisch oder zyklisch, zunichte.

Blickt man auf die in *Das Chaos in kosmischer Auslese* vorgetragene Erkenntniskritik zurück, so stellt sich die Frage, ob Mongrés argumentatives Verfahren der schrittweisen Variation einer angenommenen transzendenten Zeitstruktur als beweisend – im Sinne eines indirekten Beweises – oder als ein metaphorisches Verfahren interpretiert werden sollten. Für beide Deutungen finden sich Belege im Text.[343] Dennoch scheint mir klar zu sein, dass der Gestus des Beweisens

[338] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 30

[339] Ebd., S. 39.

[340] Vgl. zu beiden Abschnitt 2.3.5.

[341] Alle Zitate aus *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 47.

[342] Ebd., S. 43.

[343] Die Rede vom „Beweis“ wird vom Beginn des Buches an vorbereitet, freilich oft mit Umschreibungen wie „analytische Zergliederung“ oder dem „apagogischen Gang [...] von geradezu syllogistischer Zuverlässigkeit“, vgl. *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 6, und dann mit einem „Beweis“ des „Fundamentalsatzes“ verstärkt, vgl. S. 16. Zum metaphorischen Charakter von Mongrés Vorgehen finden sich aber ebenfalls sprechende Belege, bes. mit Blick auf die „Zeitebene“, vgl. u.a. S. 164. Zur Problematik vgl. auch Brieskorns Diskussion in HGW, Band IB, S. 315 f.

vor allem dazu diente, eine durch mathematische Metaphern angereicherte Poesie möglicher Zeit- und Weltformen zu entfalten, die nicht als ein strenges philosophisches Argument missverstanden werden sollte. Behält man dabei die Radikalität und Unvertrautheit der komplexen Konstruktionen der transfiniten Mengenlehre im Auge, zu der Hausdorff später so viel beigetragen hat, so fällt es schwer, sich nach einem Durchgang durch die Zeitkritik der Mongréschen Monographie wieder auf gewohnte, oder auch nur auf sanft (statt radikal) erweiterte Zeitvorstellungen zurückzuziehen. Im Nachvollziehen der Emanzipation der Imaginationen der Zeit, die Mongré zwar nicht angestoßen, aber entschieden radikalisiert hat – auch gegenüber den Ideen Nietzsches zur ewigen Wiederkehr – werden vielleicht auch die Begrenzungen des Mongréschen Rahmens überschreitbar.

Wer die von Mongré aus der Tradition übernommenen Unterscheidungen zwischen Ding und Erscheinung bzw. Zeitverlauf und Zeitinhalt von vornherein ablehnt, mag Mongrés Konstruktionen zu Recht als philosophisch gegenstandslos betrachten. Die von ihm beschriebenen Möglichkeiten von Zeitverhältnissen werden dadurch allerdings nicht gegenstandslos; sie erhalten lediglich einen anderen Status. Von Schritten in einem indirekten Beweis gegen die Metaphysik wandeln sie sich zu poetischen Imaginationen, eben von Möglichkeiten von Zeitverhältnissen.

Eine weitere Beschränkung des Mongréschen Vorgehens liegt selbstverständlich auch in dem nie verlassenen, bewusstseinstheoretischen Rahmen, in dem es sich bewegte. Dieser könnte allerdings überschritten werden, ohne die zentrale Denkfigur der Variation der Zeitverhältnisse preiszugeben: Statt von zeitlich erfahrenden Bewusstseinen könnten wir von einer Pluralität physikalischer Systeme, von lebenden Wesen, von handelnden Akteuren, von Maschinen, ja vielleicht auch von Formationen des Wissens, von Serien von Lektüren eines Textes oder Interpretationen eines Musikstückes usw. sprechen und einen großen Teil der Mongréschen Überlegungen beibehalten. Wesentlich sind dabei lediglich zwei Dinge: der formale Aspekt einer zeitlich geordneten Realisierung von Zeitinhalten muss bestehen bleiben, und ein geeignetes Konzept von pluraler Individualität muss auf die zeitlich verfassten Systeme, um die es geht, anwendbar sein.

3.4 Empirischer und transzendenter Raum

Die Argumentation Mongrés gegen die transzendente Realität des Raumes im vierten Kapitel seiner Monographie verlief in ähnlicher Weise, wobei er in diesem Kontext das mathematische Stichwort der „Transformationen“ des Raumes noch stärker aufgriff.

> Man denkt sich zunächst, wie der Realist, ein getreues Urbild des empirisch gegebenen Raumes als transcendent real und sucht es alsdann so stark zu variieren, wie es ohne Zerstörung der empirischen Wirkung gehen will.[344]

[344] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 73.

Da Mongré allerdings davon ausging, dass der „empirische Weltinhalt“ nicht in derselben Weise stets und zwingend räumlich verfasst sein musste, wie er zeitlich verfasst war, hielt er „die Leistungsfähigkeit dieser Methode“ für geringer „als im Falle des Zeitproblems“.[345] Eine der Fragen, die er in diesem Zusammenhang stellte, betraf die Übertragung des für die Zeit entscheidenden Arguments, dass die empirische Zeitvorstellung eines Bewusstseins stets Teil des jeweils von diesem erlebten Augenblicks war. Konnte ebenso gesagt werden, dass die gesamte empirische Raumvorstellung eines Bewusstseins ausschließlich Teil des von diesem erlebten Raumelements war? Wie wir in 2.3.7 gesehen haben, hatte Auguste Calinon eine astronomische Fiktion vorgeschlagen, die dies nahelegte: das in einem Observatorium, an dessen panoramischen Wänden eine optische Abbildung des umgebenden Sternenraums zu sehen war, entstehende Bild war nicht zu unterscheiden vom Bild des Weltalls selbst. Ohne Calinon im Text zu nennen, radikalisierte Mongré diese Fiktion:[346]

> Würde der beobachtende Astronom etwas davon merken, wenn plötzlich der gesamte Raum nebst Inhalt, mit Ausnahme allein seines Observatoriums, beseitigt und durch einen leeren Raum ersetzt würde? Aber alles, was ihm von der Welt gehört und woraus er seine Welt aufbaut, bliebe dabei nach der Voraussetzung intact: ebensowohl die letzte Wegstrecke des Lichtstrahls, den er durch ergänzenden regressus auf einen lichtaussendenden Himmelskörper bezieht, wie die von seinem Gehör aufgefangene Lufterschütterung, zu der er als „Ursache“ einen in der Ferne rollenden Eisenbahnzug suppliert. Ja, gehen wir weiter: fiele nicht nur die umgebende Welt, sondern auch der Beobachtungsraum, das Teleskop fort, würde selbst der Leib des Astronomen, mit Ausnahme des Gehirns, transcendent vernichtet – würde diesem Defect auch nur die leiseste Spur einer Wahrnehmung entsprechen? Wahrscheinlich nicht, dürfen wir sagen, gewiss nicht, muss der consequente Materialist sagen.[347]

Der anders als für die Zeit beim Raum bestehende Rest eines Zweifels an dieser Stelle lag daran, so formulierte Mongré etwas überraschend, dass „ein auf Fernwirkung immateriell reagirendes Bewusstsein doch nicht zu den Unmöglichkeiten gehört.“[348]

Unabhängig von diesem Zweifel spielte Mongré nacheinander folgende Transformationen der zunächst angenommenen Abbildung vom transzendenten, „absoluten“ Raum in den emirischen Raum durch: die Gruppe der Rotationen und Translationen des zunächst als Euklidisch angenommenen Raumes, die – schon mehrfach erwähnte – „gleichmässige Vergrösserung oder Verkleinerung aller Raumdimensionen“, die Spiegelungen des Raumes an einer Ebene; es folgten, mit der eingangs gemachten Einschränkung, die „transcendente Vernichtung“ von Teilen des absoluten Raumes (entsprechend zu Schritt 3 für die Zeit), von

[345] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 73.
[346] Dass Hausdorff Calinons Gedankenexperiment kannte, ist im Nachlass belegt, vgl. den im vorliegenden Band edierten Fasz. 1079, Blatt 2.
[347] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 77.
[348] Ebd.

der aus mit „einiger Unvorsichtigkeit [...] sofort zum Ziel, zur Möglichkeit einer beliebigen Transformation zwischen beiden Räumen“ geschlossen werden könne.[349] Vorsichtiger schien es Mongré jedoch, davor noch weitere speziellere Transformationen zu bedenken, etwa die „Raumausdehnung oder Raumverkürzung längs einer einzigen Dimension“.[350] Auch in solchen Fällen ließ sich eine entsprechende Veränderung des „physiologischen Sehens“ denken, das dem „Gehirn nach wie vor dasselbe System von Nachrichten durch Nervenerregung“ zuleitete, sodass auch eine solche Transformation der Beziehung des absoluten und des empirischen Raumes ohne „Bewusstseinseffect“ bleiben könnte, wie er unter ausdrücklicher Bezugnahme auf Helmholtz’ Theorie des Sehens argumentierte.[351]

Ebenfalls mit längeren Zitaten aus Helmholtz’ Schriften fügte Mongré dann seine Überlegungen zu den klassischen nichteuklidischen Geometrien – ein Thema, das den jungen Mathematiker Hausdorff in den Folgejahren oft beschäftigen sollte – an: Auch hier ließ sich, so folgerte er, aus empirischen Messungen allein nicht schließen, welche geometrische Struktur der Raum habe, da

> die Starrheit gewisser Naturkörper [...] nicht eine aus räumlichen Messungen abgeleitete Thatsache, sondern eine den räumlichen Messungen zu Grunde liegende Voraussetzung

war.[352] Mongré schloss:

> Ich darf hiermit wohl den Beweis, soweit er sich erbringen lässt, als erbracht ansehen, dass es keinen absolut realen Raum von thatsächlich bestimmter Constitution giebt, die von unseren Sinnen einfach realistisch abphotographirt würde; denn bei Umformung der ihn erfüllenden physischen Körper bleibt unser Bewusstseinsbild unverändert. Es lässt sich stets ein Verhalten der starren Naturkörper, die unsere Massstäbe bilden, ersinnen, wobei die Messungen ein von der „Wirklichkeit“ völlig verschiedenes Resultat ergeben; es sind eben die Messungen und nicht diese Wirklichkeit „massgebend“. Nennen wir jene Raummessung, die auf Voraussetzungen über Starrheit und freie Beweglichkeit fester Körper beruht, die physische Geometrie, die andere, im hypothetischen absoluten Raume angestellte die transcendentale, so können wir das Gesagte dahin zusammenfassen, dass die transcendentale Geometrie überflüssig ist, wofern sie der physischen beistimmt, unbrauchbar, wenn sie ihr widerspricht.[353]

So, wie Mongré für die Erkenntniskritik der Zeit die Frage nach den möglichen, möglicherweise vom Ordnungstypus reeller Intervalle abweichender Zeitordnungen aufgeworfen hatte, stellte er ans Ende seines Kapitels „Vom Raume“ auch

[349] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 92.
[350] Ebd.
[351] Ebd., S. 92-99.
[352] Ebd., S. 101.
[353] Ebd., 105. Diese Passage knüpfte unmittelbar an die Unterscheidung zwischen „physischer“ und „transcendentaler“ Geometrie an, die Helmholtz in seiner Antwort gegen den Kantianer Land gegeben hatte, vgl. oben, Abschnitt 2.3.6.

die Frage, ob für den Raum die Möglichkeit anderer Stetigkeitsverhältnisse bestand. Diese Frage betraf im Grunde beides, Raum und Zeit, und auch sie sollte den Mathematiker Hausdorff viele Jahre lang begleiten:

> Noch eine letzte Bemerkung: auch an der bisher nicht angetasteten Voraussetzung der Stetigkeit von Raum und Zeit liessen sich möglicherweise Verallgemeinerungen anbringen; es ist eine durch G. Cantors Untersuchungen angeregte Frage, ob nicht an Stelle des gewöhnlich angenommenen Punktcontinuums etwa eine überall dichte Punktmenge oder ein Semicontinuum (ein Continuum z.B., aus dem gewisse continuirliche oder überall dichte Punktmengen entfernt sind) die gleichen Dienste thäte. Aber die Continuität, auf physischem wie mathematischem Gebiete, ist ein schwieriges Problem, über das die Discussion noch nicht einmal recht angefangen hat – geschweige denn beendet und um Mitteilung ihrer Ergebnisse zu befragen wäre.[354]

3.5 „Transcendenter Nihilismus“

Wie das Schlusskapitel von *Das Chaos in kosmischer Auslese*, aber auch viele schon vorher eingestreute Passagen zeigen, zielte Hausdorff in dieser Phase nicht nur auf eine kritische Untersuchung der Zeit- und Raumvorstellungen in den Wissenstraditionen seiner Zeit. Vielmehr suchte er – ganz im Einklang mit den erkenntniskritischen Aphorismen des Erstlings von Mongré – die Möglichkeit darzutun, dass man

> die „kosmische“ Beschaffenheit unserer Welt, ihre Zweckmäßigkeit, Gesetzlichkeit, vielleicht gar Schönheit [...] aus einem blossen transcendenten Zufallsspiel hervorgehend denken

konnte, dass also „empirische Ordnung aus transcendentem Chaos entspringen“ konnte.[355] Dies schloss auch die Zurückweisung der „transcendenten“ Bedeutung weiterer physikalischer Begriffe wie Energie, Masse, Materie und Entropie sowie mathematischer Begriffe wie Krümmung oder Dimension des Raumes, ja jedes spezifischen naturwissenschaftlichen Begriffs, der in einem mathematisch-physikalischen Theoriengebäude stand, mit ein. Mongré gab dieser Position den Namen des „transcendenten Nihilismus“ oder auch des „transcendenten Pluralismus“, indem er im Hinblick auf die Vielzahl individueller Bewusstseine noch einmal unterstrich:

> Jede Art von Bewusstsein schneidet von selbst aus dem Inbegriff aller Fälle den Specialfall heraus, in dem allein die Vorbedingungen dieses Bewusstseins erfüllt sind; es wirkt als Sieb, als Selection, als Zwangsverbindung für sonst unabhängige Einzeldinge, als Gesetzlichkeit innerhalb eines Zufallsspiels, als Kosmos mitten im Chaos – natürlich nur „subjectiv“, nur für den Träger dieses und keines anderen Bewusstseins![356]

[354] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 121 f.
[355] Ebd., S. 179.
[356] Ebd., S. 202 f.

Mongré merkte zugleich an, dass dieser „Nihilismus“ – mit Bezug auf die Annahme einer transzendenten Wirklichkeit – oder „Pluralismus“ – mit Bezug auf die Individualität jeder Wahrnehmung und Erfahrung – auch als „empirischer Monismus“ erscheinen konnte, dass also seine Erkenntniskritik hinsichtlich der naturwissenschaflichen Begriffe in letzter Instanz auf eine (sehr individualistisch gedachte) Form des Empirismus hinauslief.[357]

Nun kann man fragen (und die Frage ist gestellt worden), was Mongrés nihilistische Poesie einer aufgelösten Zeit, einer aufgelösten Raumstruktur, ja einer individualistisch aufgelösten Pluralität der Erfahrung für die Naturwissenschaften bedeutete. Hatte Mongré sich hier auf den Spuren Nietzsches in einem Jenseits der Wissenschaften verloren? Wie griff er in *Das Chaos in kosmischer Auslese* die in den früheren Aphorismen aufgetauchte Figur der Mathematik als einer Selbstkritik der Wissenschaft wieder auf?

Die Antwort auf diese Frage, mithin auch der zu Beginn des Werkes von 1898 angekündigte „neue Standpunkt zur Naturwissenschaft“, liegt in der Zurückweisung jeglicher metaphysischen Komponente im Gebäude der empirischen Wissenschaften, einer Zurückweisung, die sich zudem systematisch des Instruments der Variation der zugrundeliegenden mathematischen Vorstellungen bediente. Mongrés Buch schloss mit den Sätzen:

> Die ganze wunderbare und reichgegliederte Structur unseres Kosmos zerflatterte beim Übergang zum Transcendenten in lauter chaotische Unbestimmtheit; beim Rückweg zum Empirischen versagt dementsprechend bereits der Versuch, die allereinfachsten Bewusstseinsformen als nothwendige Incarnationen der Erscheinung aufzustellen. Damit sind die Brücken abgebrochen, die in der Phantasie aller Metaphysiker vom Chaos zum Kosmos herüber und hinüber führen, und ist das Ende der Metaphysik erklärt, – der eingeständlichen nicht minder als jener verlarvten, die aus ihrem Gefüge auszuscheiden der Naturwissenschaft des nächsten Jahrhunderts nicht erspart bleibt.[358]

Diese Wendung wirft eine Vielzahl von sachlichen und historischen Fragen auf, deren Klärung der weiteren Forschung überlassen bleibt. Eine historische Frage betrifft die nach den Kontexten des sehr positiven Aufgreifens der Idee des Nihilismus. Viele philosophischen Autoren der Zeit wandten sich entschieden *gegen* nihilistische Ideen. Auch Schopenhauers pessimistische Ethik wurde, nicht zuletzt durch Nietzsche, mit diesem Etikett belegt.[359] In Nietzsches Philosophie spielte der Begriff eine größere Rolle, die teils wiederum kritisch-analytisch, teils offener war. In seiner *Genealogie der Moral* kündigte Nietzsche 1887 an, dass er an einem Werk zur „Geschichte des europäischen Nihilismus“ schreibe; das Werk erschien jedoch nie.[360] Auch Nietzsche äußerte sich vielfach in ambivalenter Haltung zu dem von ihm diagnostizierten Nihilismus, aber in den

[357]Das Stichwort des „empirischen Monismus“ findet sich eingeführt in *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 184, und wird wieder aufgegriffen auf S. 203.
[358]Ebd., S. 209.
[359]Vgl. z.B. [Müller-Lauter 1984].
[360][Nietzsche 1887], § III-27.

umfangreichen zu diesem Thema nachgelassenen Fragmenten, die Hausdorff, der zur Zeit der Abfassung von *Das Chaos in kosmischer Auslese* bereits Zugang zum Nachlass Nietzsches hatte, vielleicht kennen lernte, finden sich auch Bemerkungen, die durchaus in die Richtung der Mongréschen Überlegungen gingen.[361] So notierte Nietzsche beispielsweise:

> Dass es keine Wahrheit giebt; dass es keine absolute Beschaffenheit der Dinge, kein „Ding an sich" giebt – dies ist selbst ein Nihilismus, und zwar der extremste.[362]

Andererseits findet sich ein positiver Bezug auf das Konzept des Nihilismus auch in der gleichnamigen kulturellen und literarischen Bewegung der Zeit, die etwa in Iwan Sergejewitsch Turgenews Roman *Väter und Söhne* – freilich auch dort in distanzierter Haltung – bekannt gemacht wurde, und auf die auch Nietzsche reagierte. Auch in dieser Bewegung stand der Nihilismus für eine Kritik tradierter Autorität und eine ausgesprochen freundliche Haltung zu den Naturwissenschaften und der Mathematik. Könnte es sein, dass Mongré mit seiner Prägung des Begriffs „transzendenter Nihilismus" auch auf diese Bewegung anspielen wollte?[363]

Eine sachliche Frage wiederum betrifft die nach der Stellung der Mongréschen Überlegungen in einer Geschichte des wissenschaftstheoretischen Empirismus im Übergang vom 19. zum 20. Jahrhundert. Auf diese Frage wird in den folgenden Abschnitten noch zurückzukommen sein.

3.6 Spätere Überlegungen Hausdorffs zu den Themen von *Das Chaos in kosmischer Auslese*

3.6.1 Fragmente des Nachlasses

Hausdorffs Nachlass enthält umfangreiche Notizen und Manuskripte, die im Umfeld der erkenntniskritischen Monographie Mongrés stehen. Einige – aber bei weitem nicht alle – dieser Materialien sind im vorliegenden Band erstmals ediert. Leserinnen und Leser können sich daher ein eigenes Bild davon machen, wie Hausdorff in der Zeit der Abfassung seines Buches, aber auch in den Jahren danach zu Themen wie „Zeit", „Ähnlichkeit. Absolute und relative Bewegung. Der Raum als Ganzes", „Stetigkeit. Mengenlehre. Dreidimensionalität", „Projective Geometrie. Grundlagen, Axiome. Freie Beweglichkeit", „Transformationsprincip", „Psychologisches" Material sammelte. Alle diese Überschriften sind von Hausdorff selbst vergebene Titel von Mappen, in welchen er diese

[361] Zu den Beziehungen Hausdorffs zu Elisabeth Förster-Nietzsche und dem sog. „Nietzsche-Archiv" vgl. Egbert Brieskorns Ausführungen in HGW, Band IB, S. 383-407.

[362] [Nietzsche KSA] Bd. 12, S. 351.

[363] Eine zeitgenössische Darstellung des Nihilismus, die Hausdorff gekannt haben könnte, ist die Aufsatzreihe *Nihilismus und russische Dichtung* des jüdischen Schriftstellers und späteren Redakteurs der Wiener *Neuen Freien Presse* Wilhelm Goldbaum, die 1881 in der weit verbreiteten und in Leipzig verlegten literarischen Zeitschrift *Die Gartenlaube* erschienen war.

Notizen über die Jahre hinweg einordnete.[364] Die Datierung ist oft schwierig, aber es ist davon auszugehen, dass Hausdorff mit der Sammlung seiner Notizen bereits vor der Publikation von *Das Chaos in kosmischer Auslese* begann und sie zumindest bis in die Zeit seiner Leipziger Antrittsvorlesung über *Das Raumproblem* von 1903 fortsetzte[365], und teilweise sogar noch deutlich länger.

Es ist an dieser Stelle weder möglich noch sinnvoll, eine umfassende Auswertung des Nachlassmaterials vorzunehmen. Soweit Hausdorffs spätere Arbeiten zu den Themen dieses Bandes betroffen sind, finden sich einschlägige Hinweise in den folgenden Abschnitten dieser Einleitung. Zunächst seien hier einige Passagen aus dem Nachlass herausgegriffen, die zeigen, dass Hausdorff jedenfalls die zentralen Thesen seiner Erkenntniskritik weiterverfolgt hat. Dabei stieß er manchmal auch auf neue Aspekte und Themen, die mit seiner späteren mathematischen Arbeit in Verbindung standen, ja vielleicht zu den Motiven gehörten, sich mit Themen wie den möglichen Ordnungen einer Menge oder den geometrischen und topologischen Strukturen eines Raumes intensiver zu beschäftigen.

Eine besondere Stellung nimmt die mit „Transformationsprincip“ betitelte Mappe des Nachlasses ein.[366] Die Notizen dieser Mappe beschäftigen sich mit einigen zentralen Überlegungen von *Das Chaos in kosmischer Auslese*. So umkreist eine längere Notiz das, was Hausdorff zum Zeitpunkt ihrer Niederschrift als das Herzstück seiner Argumentation auffasste.[367] Die Notiz, die mit der Bemerkung

> Der Nerv meiner Betrachtung liegt eigentlich anderswo, als ich im „Chaos“ errathen lasse.

beginnt, unterstreicht erneut die mengentheoretische Freiheit, der absoluten und empirischen Zeit beliebige „Geräumigkeit, Capacität, Unerschöpflichkeit“ zuzuschreiben, ein Motiv, das bereits in obige Darstellung der Erkenntniskritik der Zeit in *Das Chaos in kosmischer Auslese* eingeflossen ist. Hier lässt sich – wie an vielen verwandten Passagen des Nachlasses – verfolgen, wie Hausdorff gerade die mengentheoretische Seite seiner Überlegungen tiefer zu durchdringen und weiter zu präzisieren suchte, und wie gleichsam der Erkenntniskritiker Mongré und der angehende Mengentheoretiker Hausdorff miteinander interagierten.

Im selben Konvolut finden sich Notizen, die den gesamten zeittheoretischen Rahmen des Arguments des Chaos-Buches in Frage stellen, und die noch einmal bestätigen, dass Hausdorff eine rein mengentheoretische Fassung seines Arguments für möglich hielt. Der „Hülfsbegriff“ der Bewegung des Gegenwartpunktes, so notierte Hausdorff, war letztlich

[364] Vgl. dazu das Findbuch des Hausdorff-Nachlasses, zu etlichen Faszikeln in Kapsel 49 des Nachlasses.

[365] Weitere relevante Faszikel des Nachlasses, hier ebenfalls erstmals ediert, enthalten Entwürfe aus den Jahren 1903 und 1904, die vermutlich zu einem Buchprojekt über Zeit und Raum gehören, das in Abschnitt 4.4 besprochen wird.

[366] Die Mappe, Faszikel 1079 des Nachlasses, ist in diesem Band vollständig ediert.

[367] NL Hausdorff, Fasz. 1079, Blatt 7.

> zu beseitigen; das Substrat, das den Zeitphänomenen zu Grunde liegt, ist selbst jeder zeitlichen Vorstellung zu entkleiden.[368]

Die „Zeitebene“, so schrieb Hausdorff nun ausdrücklich, war zu ersetzen durch „irgend eine transfinite Menge von Weltzuständen“, und auch dem Prinzip der indirekten Auslese war „sein Thätigkeits-Character zu nehmen; es muss alles rein ontologisch, starr existentiell gefasst werden.“[369]

Auch speziellere Motive des Buches wie „Calinon's Versuch“ einer fiktiven Reduktion der astronomischen Beobachtung auf die unmittelbare Umgebung des Astronomen und namentlich das Transformationsprinzip finden sich in den Notizen ebenfalls fortgeführt und weiter entfaltet, und Hausdorff notierte sich auch, wenn er in den Schriften anderer aus den Jahren um 1900 ähnliche Überlegungen fand. Die Notizen verraten auch die Überraschung, die er dabei bisweilen verspürte, so, als er eine Variante des Prinzips bei Poincaré wiederfand:

> Vielleicht liesse sich das Princip auf diese Weise sogar bestreiten – wozu ich Lust hätte, seit ich es auch bei Andern (Poincaré) gefunden habe!!![370]

Hausdorff bezog sich hier höchstwahrscheinlich auf den zuerst 1903 von Henri Poincaré veröffentlichten Aufsatz „La notion de l'espace“.[371] Dort hatte Poincaré im Anschluss an die früheren Diskussionen über in der Erfahrung nicht nachweisbare Kongruenz- und Ähnlichkeitstransformationen des Raumes formuliert:

> Aber mehr noch; nicht nur die Welten wären nicht zu unterscheiden, wenn sie einander gleich oder ähnlich wären, das heißt, wenn man von der einen zu der anderen übergehen könnte, indem man die Koordinatenachsen oder den Maßstab, nach dem die Längen bemessen sind, ändert, sondern sie wären auch nicht zu unterscheiden, wenn man durch irgend eine Punkttransformation von einer zur andern übergehen könnte.[372]

Während Poincaré andere erkenntnistheoretische Konsequenzen als Hausdorff aus seiner Variante eines Transformationsprinzips zog (im Sinn des von ihm vertretenen Konventionalismus), überlegte Hausdorff in seiner Notiz, ob sich das Prinzip noch weiter radikalisieren ließ: Wo Poincaré immerhin an der Stetigkeit und Eineindeutigkeit der Transformationen festhielt, fragte sich Hausdorff, ob auch ein „Verzicht auf Stetigkeit und Eindeutigkeit der Transformation“ möglich wäre.[373]

Das Thema der Stetigkeit von Zeit und Raum beschäftigte Hausdorff in vielen seiner Notizen. Den topologischen Eigenschaften von beiden ist eine eigene Mappe gewidmet, die Hausdorff bis in die ersten Jahre seiner ernsthaften

[368] NL Hausdorff, Fasz. 1079, Blatt 4.
[369] Ebd.
[370] Ebd., Blatt 3.
[371] [Poincaré 1903]. Der Aufsatz erschien zuerst im Jahr 1903 in der *Revue de métaphysique et de morale*; er wurde ein Jahr später in Poincarés Monographie *Le valeur de la science* aufgenommen. Eine deutsche Übersetzung erschien im Jahr 1906, aus dieser ist hier zitiert.
[372] [Poincaré 1906], S. 46 f.
[373] NL Hausdorff, Fasz. 1079, Blatt 3.

Beschäftigung mit der Mengenlehre fortführte, und in welcher er einige technische Begriffe seiner frühen mengentheoretischen Arbeiten aufgriff.[374] Zum einen führte er hier seine an mehreren Stellen gemachten Bemerkungen fort, dass auch von den gewöhnlichen Kontinua der reellen Zahlen oder des dreidimensionalen euklidischen Raums abweichende Formen von Zeit und Raum für seine erkenntniskritischen Überlegungen ausreichend waren, beispielsweise überall dichte Mengen. Zum anderen spielte er die Idee von unstetigen Bewegungen von Gegenwartspunkten nun formaler durch, indem er besondere Abbildungen der „Zeit“ in die Menge der „Weltzustände“ diskutierte.

Unter anderem interessierte ihn das Problem, ob unter der Voraussetzung einer gewöhnlichen, durch die reellen Zahlen dargestellten Zeit eine Bewegung durch eine Menge von Weltzuständen denkbar war, die „gänzlich aperiodisch“ war. Darunter verstand er die Forderung, dass in der betrachten Bewegung des Gegenwartspunkts „niemals eine Zeitstrecke einer andern ähnlich wird“. Es liegt nahe, dass ein Nachweis der Möglichkeit solcher Bewegungen der weiteren kritischen Auseinandersetzung mit Nietzsches Lehre von der ewigen Wiederkunft dienen sollte, oder doch zumindest durch sie angeregt war. Mathematisch musste die Forderung weiter interpretiert werden. Im speziellen Fall einer Bewegung, die durch lediglich zwei Weltzustände 1 und 2 verlief (d.h. einer Abbildung $A : \mathbb{R} \to \{1, 2\}$), spezifizierte Hausdorff, dass es „nicht möglich sein [sollte], ein Stück der Menge der Zeitpunkte[, die dem Weltzustand] 1 [zugeordnet waren,] auf ein anderes Stück ähnlich abzubilden.“[375] Wie er dann bewies, war es möglich, solche Abbildungen unter Zuhilfenahme der von ihm eingeführten sog. „gestuften Mengen“ zu konstruieren.[376]

Damit hatte Hausdorff ein gleichsam maximales Gegenbeispiel zu Nietzsches vermeintlichem Beweis der Wiederkunftslehre gegeben. Ein Zusatz zu diesen Notizen trägt das Datum des 22. November 1908, was unterstreicht, wie lange Hausdorff diese Fragen aus dem Umfeld von *Das Chaos in kosmischer Auslese* noch beschäftigten.

Ein weiteres Thema, das in einer Reihe von Notizen des Nachlasses behandelt wird, betrifft die Parallelität und gegenseitige Beziehung der Überlegungen zur Zeit und zum Raum sowie eine in beiden Begriffen symmetrische Formulierung aller erkenntniskritischen Überlegungen. So konnte man beispielsweise, notierte er, nicht nur vom „Weltzustand“ als „dem Inbegriff aller [mit empirischem Inhalt erfüllten] Raumpunkte P in einem Moment M“ sprechen, sondern auch umgekehrt von der „Weltgeschichte“ eines Raumpunkts als dem „Inbegriff aller [mit empirischem Inhalt erfüllten] Zeitpunkte M in einem bestimmten Raumpunkt P“, usw.[377]

Vorläufig festgehalten findet sich in den meisten Notizen des Nachlasses die bewusstseinstheoretische Orientierung der Hausdorffschen Überlegungen zu Zeit und Raum. Auch diese wird in verschiedenen Richtungen unter Rückgriff

[374] NL Hausdorff, Fasz. 1078. Auszüge sind im Folgenden ediert.
[375] Ebd., Blatt 13 und 15.
[376] Zu Hausdorffs Definition gestufter Mengen vgl. Abschnitt 5.3.1.
[377] Vgl. z.B. NL Hausdorff, Fasz. 1081, Blatt 3-4v.

auf mengentheoretische Konzepte weiter durchgespielt. Ein nicht ganz einfach zu interpretierendes, hier ebenfalls ediertes Fragment legt nahe, dass er sogar mit dem Gedanken spielte, Begriffe wie den „Bewusstseinseffect" einer Zeitfolge formaler zu fassen.[378] Nehmen wir wieder die „absolute Zeit" als eine geordnete Menge T an, sowie X als die Menge der „Weltzustände", und $A : T \to X$ als eine „Bewegung des Gegenwartspunktes". Dann, so scheint Hausdorff zu überlegen, entsteht ein „Bewusstseinseffect" nur dann, wenn es Ordnungsintervalle $I \subset T$ gibt, in denen A ein „Zeitelement" für das in A befindliche Bewusstsein realisiert. Was könnte damit gemeint sein? Nehmen wir zunächst, dem Verfahren von *Das Chaos in kosmischer Auslese* gemäß, X als empirische „Zeitlinie" an, d.h. als die Menge der nicht in der absoluten Zeit, sondern durch die empirische Zeitvorstellung eines Bewusstseins geordneten Weltzustände. Dann, so meint Hausdorff wohl, entsteht eine empirische Zeitwahrnehmung nur, wenn das Bewusstsein in seiner durch A definierten Bewegung *Abschnitte* von X ordnungsstetig durchläuft. Es wäre also eine zweite Ordnungsrelation auf X gegeben (die der subjectiven Wahrnehmung der Zeitfolge in der erfüllten Zeit) und ein Kriterium, das sagt, welche Teilmengen von X eine solche empirische Zeitwahrnehmung liefern können. Hausdorffs Beispiele zeigen klar, dass er bei Abfassung dieses Fragments die *Elemente* von X im mengentheoretischen Sinn allein *nicht* als ausreichend für einen Bewusstseinseffect ansah.

Weiter interpretierend könnte man z.B. so ansetzen: Sei zunächst $X = \mathbb{R}$, und gehöre zu jedem offenen Intervall von X (bei Durchlaufung) eine Zeitwahrnehmung. Dann liefern nur solche Bewegungen A „Bewusstseinseffecte", für die es Ordnungsintervalle $I \subset T$ gibt, sodass $A|_I$ einen Ordnungsisomorphismus zwischen I und einem offenen Intervall in X gibt. Allgemeiner: Sei $(T, <_T)$ die (transzendent geordnete) absolute Zeit, sei $(X, <_X)$ die (durch die Zeitwahrnehmung geordnete) empirische Zeit, und sei $A : T \to X$ die Bewegung eines Gegenwartpunktes. Dann kann man dann und nur dann von der Erzeugung eines „Bewusstseinseffects" durch A in einem Ordnungsintervall $I \subset T$ sprechen, wenn gilt, dass A einen Ordnungsisomorphismus zwischen I und einem Intervall bzgl. der Ordnung $<_X$ liefert.

Für beliebige Mengen von Weltzuständen X ergibt sich bei einer solchen Interpretation (die deutlich über die Hausdorffsche Notiz hinausgeht) freilich die Schwierigkeit, dass die Voraussetzung einer (durch die empirische Zeitvorstellung eines Bewusstseins gegebenen) Ordnung $<_X$ von Weltzuständen in der „Zeitebene" oder in einer noch allgemeineren Menge nicht mehr klar ist, und dass diese Interpretation zudem für die „Mehrheit der Gegenwartpunkte" pluralisiert werden müsste. Man kann sich durchaus vorstellen, dass Hausdorff in seinen Überlegungen ebenfalls auf derartige Schwierigkeiten seines bewusstseinstheoretischen Rahmens stieß und denselben daher allmählich lockerte.

Mit dem Blick auf eine noch stärker in mathematischer Sprache formulierte Erkenntniskritik tauchte schließlich auch ein weiteres Motiv in Hausdorffs Überlegungen auf, das in der nächsten Phase seiner Auseinandersetzung mit

[378] NL Hausdorff, Fasz. 1081, Blatt 5-6v.

den Themen von Zeit und Raum von entscheidender Bedeutung werden und den bewusstseinstheoretischen Rahmen der ersten Phase schließlich definitiv überschreiten sollte: der mathematische Formalismus. Folgende Notiz der Mappe „Transformationsprincip“ sollte zum Motto dieser zweiten Phase werden:

> Der Formalismus ist der wahre Empirismus.[379]

3.6.2 Zeit und Raum als Themen literarischer Essays

An das Ende der ersten Phase der Hausdorffschen Beschäftigung mit Zeit und Raum fallen auch etliche der literarischen Essays, die er unter dem Pseudonym Mongré veröffentlichte. Von besonderer Bedeutung für das hier behandelte Thema sind vor allem der Essay „Tod und Wiederkunft“ sowie die Auseinandersetzungen mit Nietzsches Wiederkunftslehre in den kurzen Essays, die hierzu in Band VII wiedergegeben sind. Alle diese Texte sind in den Jahren 1899 und 1900 entstanden. Da diese in Walter Purkerts Darstellung der Essays in Band IB dieser Edition näher besprochen sowie in Band VII und VIII kommentiert sind, kann hier auf eine genauere Darstellung verzichtet werden.

Die Essays zeigen zum Einen, wie wichtig ihm die kritische Auseinandersetzung mit dem Nietzsche zugeschriebenen „Beweis“ der Lehre von der ewigen Wiederkunft war, die er bereits in seiner Aphorismensammlung *Sant' Ilario* begonnen und dann in *Das Chaos in kosmischer Auslese* fortgeführt hatte. Wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, dachte Hausdorff auch später noch über das Problem der Wiederkehr des Gleichen nach – freilich sollte sich sein Interesse mehr und mehr dahin verschieben, gerade nicht über die Möglichkeit eines zyklischen Weltverlaufs, sondern umgekehrt über möglichst aperiodische Weltverläufe nachzudenken. Schon im dem Essay unter dem Titel „Nietzsches Lehre von der Wiederkunft des Gleichen“ vom Mai 1900 betonte er nicht nur, dass „Nietzsches Versuch, die mathematisch-mechanische *Nothwendigkeit* der Wiederkehr zu beweisen, abzulehnen ist“, sondern auch, dass sie „auch im bescheideneren Sinne einer *Thatsache* oder *Möglichkeit* [...] nur auf geringe Unterstützung von Seite der Naturwissenschaft zu rechnen hat.“[380] Als Grund führte Mongré zunächst die Lehre von der thermodynamischen Irreversibilität der physikalischen Prozesse an. Wie wir gesehen haben, suchte er schließlich – unter Rückgriff auf sein Konzept einer Bewegung des Gegenwartspunktes – spezifische Beispiele solcher Bewegungen, in welchen kein Zeitabschnitt einem anderen ähnlich war.

In dem schon 1899 in der *Neuen Deutschen Rundschau* publizierten Essay „Tod und Wiederkunft“ nutzte Hausdorff dann den Topos der ewigen Wiederkunft, um auch seine eigenen, in *Das Chaos in kosmischer Auslese* vorgestellten Überlegungen über die Willkürlichkeit der Bewegungen des Gegenwartpunktes in das Medium des Essays zu überführen und so möglicherweise einem größeren Publikum nahezulegen. Hier verwies er eine fiktive Leserin auf die „seltsamen

[379]NL Hausdorff, Fasz. 1079, Blatt 1.
[380][H 1900d], in HGW, Band VII, S. 897-902, hier S. 900.

und abseitigen Speculationen“, die im „sphärocyklischen Zaubercabinet“ seiner erkenntniskritischen Monographie zu finden waren, und in welchen Vorstellungen wie die einer „Zeitebene“ und einer unübersehbaren Vielzahl möglicher Bewusstseinswelten zu finden waren:

> Solche Welten mögen neben der unserigen existiren, ohne in sie und ineinander „hineinzuragen“, jeder Strom in seiner eigenen Zeitbette fließend und von seinen eigenen, in ihm mitschwimmenden Bewußtseinsträgern als Bewußtseinswelt, als einzig existirende Welt gedeutet, lauter verschiedene Zeitlinien etwa in einer sie umfassenden Zeitebene... aber hier, verehrte Freundin, muss ich Ihnen für heute unverständlich bleiben.[381]

Auch das Ausleseprinzip – im Essay überpointiert beschrieben als „die automatische Auslese des Seins aus dem Nichtsein“ – und andere Motive seiner Erkenntniskritik fanden sich in diesen Essay aufgenommen. Es ist offensichtlich, dass er mit solchen Wendungen seine Leserinnen und Leser zur Lektüre von *Das Chaos in kosmischer Auslese* verlocken wollte – es muss vorerst offen bleiben, inwieweit er dies erreicht hat.

Die thermodynamische Idee der mit einem allmählichen Wachstum der Entropie verbundenen Irreversibilität des „Weltgeschehens“ und auch (anlässlich einer damals viel diskutierten Wiederkunft des Halleyschen Kometen) die Vorstellung der Wiederkunft griff Hausdorff zehn Jahre später in zwei der spätesten unter dem Namen Mongrés veröffentlichten Texten auf, den beiden Essays „Andacht zum Leben“ und „Der Komet“.[382] Nach wie vor stand so der erkenntniskritische Schriftsteller mit dem Essayisten ebenso in Verbindung wie beide mit dem immer erfolgreicheren Mathematiker, zu dem Hausdorff zu diesem Zeitpunkt bereits geworden war.

3.6.3 Briefe an Landauer

Die bereits in Abschnitt 3.6.1 notierte Tendenz Hausdorffs, seine erkenntniskritischen Überlegungen „jeder zeitlichen Vorstellung zu entkleiden“ zeigt sich sehr deutlich in einem offenen Brief gegen den anarchistischen Schriftsteller Gustav Landauer, den Paul Mongré in der Zeitschrift *Die Zukunft* vom 14. Juni 1902 publizierte, und in einem freundlichen polemischen Briefwechsel zwischen beiden und ihrem gemeinsamen Bekannten Fritz Mauthner, der sich daran anschloss.[383]

In seinem Artikel „Die Welt als Zeit“, veröffentlicht in *Die Zukunft* im Mai 1902, hatte Landauer gefordert, sich kritisch von der Bemühung zu distanzieren, „aus den Ergebnissen der wissenschaftlichen Forschung eine Weltgestalt

[381] [H 1899d], in HGW, Band VIII, S. 415-429, hier S. 422.

[382] Vgl. [H 1910a] und [H 1910b], beide in HGW VIII; vgl. dazu die Bemerkungen Walter Purkerts in HGW, Band IB, S. 695-703.

[383] Alle Materialien dieser Kontroverse sind veröffentlicht und kommentiert in HGW, Band VIII, S. 529-548 und Band IX, S. 409. Vgl. zum Thema außerdem HGW, Band IB, S. 535-546. Ich beschränke mich daher hier auf wenige Bemerkungen.

zu formen“, mit anderen Worten, die Resultate der (für sich genommen durchaus möglichen und wertvollen) empirischen Wissenschaften der Natur und der Psyche – zu einem „einheitlichen Weltbild“ zu überhöhen.[384] Dies war eine Forderung, die Hausdorff durchaus teilen konnte. Weniger überzeugt war er jedoch von der polemischen Zuspitzung, die Landauer dieser Forderung vor dem Hintergrund lebensphilosophischer und offen mystischer Überzeugungen gab, indem er vorschlug, „eine uralte Metapher“ durch eine andere zu ersetzen:

> Der Raum muß in Zeit verwandelt werden.[385]

In Hausdorffs offenem Brief gegen Landauer und in einer späteren Antwort auf einen privaten Brief desselben protestierte Hausdorff gegen diese universelle Verwandlung von Raum in Zeit. Dies nicht so sehr, weil ihm die Erkenntnistheorie des Raumes zwingender schien als jene der Zeit – er gab Landauer gerne zu,

> dass die Zeit als forma formalissima alles umspannt und dass die scheinbar zeitlose Raumgestalt, eines Krystalls etwa, ein verwickeltes Zusammenspiel von Wahrnehmungen, zeitlichen Erlebnissen also, oder wie Sie sagen, Intensitätsschwankungen ist.[386]

Vielmehr schien ihm die symbolische Hervorhebung der Zeitlosigkeit in einer „Exteriorisirung“ des zeitlichen Erlebens eines Bewusstseins zu einem als räumlich gedachten Nebeneinander wichtig:

> ich halte es für eine mächtige Entlastung der Sensibilität, daß diese Kluft [zwischen Ich und Nicht-Ich] aufgerissen und die Intensitätsschwankungen meines Binnenlebens zu fremden Objekten exteriorisiert wurden. Es muß noch immer mehr Raum aus der Zeit auskristallisiert werden, aus den diffus schwimmenden Seelenbegebenheiten sich ein fester Niederschlag abscheiden.[387]

Wie in Hausdorffs privatem Brief an Landauer noch deutlicher wird, suchte Hausdorff hier zum einen die Leistungen der empirischen und exakten Wissenschaften gegen die „nachgerade zu üppig ins Kraut schiessenden Menschheitserzieher und Lebensreformer“ und die „schwüle Innerlichkeit“ der Jahre um die Jahrhundertwende zu verteidigen.[388] Zum anderen aber barg seine freundliche Polemik auch ein erkenntniskritisches Anliegen, das sich mit seinen im Nachlass gleichzeitig zu findenden Versuchen berührt, die Erkenntniskritik formaler und „rein ontologisch“ zu fassen:

> Die Verdinglichung, Objectivirung, Materialisation ist eine Rettung aus dem Chaos des zeitlichen Wellenspiels von Erregungen und Seelenzuständen, ein Schritt zur Gliederung, Differenzbildung, zum Weltverständniss – [...] alle diese Schemata wieder preiszugeben und nur die letzte

[384]Landauers Aufsatz ist wiederabgedruckt in seiner Aufsatzsammlung [Landauer 1903], S. 97-128; hier S. 107 f.
[385]Ebd., S. 108.
[386]Felix Hausdorff an Gustav Landauer, 2. August 1902, in HGW, Band IX, S. 409.
[387][H 1902d], S. 442; HGW, Band VIII, S. 529.
[388]Felix Hausdorff an Gustav Landauer, 2. August 1902, in HGW, Band IX, S. 409 f.

> leerste blässeste Gemeinsamkeit aller Dinge, Zeit, zurückzubehalten wäre doch eine zu traurige Resignation.
>
> Und es wäre nicht einmal erkenntnistheoretisch consequent. Wenn schon, dann zerreißen Sie auch noch den Zeitschleier; diese universelle Illusion wird ja dadurch nicht weniger Illusion, dass sie universell ist. Diesen Schritt habe ich selber gethan in einem Buch, das den Titel trägt „Das Chaos in kosmischer Auslese"; dort bin ich allerdings so weit ins nördliche Eismeer vorgedrungen, dass ich vor Wärmebedürfnis Eskimos lieben und aus Anschauungshunger in Erde beissen könnte.[389]

Aus diesen Zeilen ist spürbar, dass Hausdorff inzwischen gegenüber einer auch noch so radikalen Philosophie des Zeitbewusstseins, wie er sie selbst etliche Jahre lang verfolgt hatte, zurückhaltender geworden war. Die (jedenfalls angestrebte) Zeitlosigkeit der Mathematik und namentlich der Mengenlehre mochte möglicherweise auch ein neues Licht auf die Erkenntniskritik werfen.

[389] Felix Hausdorff an Gustav Landauer, 2. August 1902, in HGW, Band IX, S. 411.

4. Besonnener Empirismus und axiomatische Analyse

Die zweite Phase von Hausdorffs Auseinandersetzung mit der Problematik von Zeit und Raum ist von zwei äußeren Ereignissen bestimmt, die sein eigenes Nachdenken grundlegend veränderten. Sie reichte von seiner Rezeption der axiomatischen Methode in den Grundlagen der Geometrie in den Jahren nach 1899 bis zur Publikation der Theorie der speziellen Relativität durch Albert Einstein im Jahre 1905. In dieselbe Zeit fällt auch die vertiefte Hinwendung Hausdorffs zur Mengenlehre, die mit seiner ersten Vorlesung über Mengenlehre im Sommersemester 1901 begann und die für seine spätere Laufbahn entscheidend werden sollte.[390] Auch die nichteuklidische Geometrie war in dieser Zeit wiederholt Gegenstand von Hausdorffs Vorlesungen in Leipzig. Hausdorff wandte sich so mehr und mehr jenen modernen mathematischen Gebieten zu, die für seine erkenntniskritischen Überlegungen grundlegend waren, und es konnte nicht ausbleiben, dass er auch diese selbst im Licht seiner weitergehenden wissenschaftlichen Kenntnisse neu fasste. Den Höhepunkt dieser Phase bildete Hausdorffs Leipziger Antrittsvorlesung *Das Raumproblem*von 1903 und seine im anschließenden Wintersemester gehaltene Vorlesung über *Zeit und Raum*, in welcher er seine Erkenntniskritik nun auf axiomatischer Grundlage vortrug. Offenbar dachte Hausdorff in dieser Zeit auch über eine Niederschrift derselben in Buchform nach, von der ein einleitendes Kapitel mit dem Titel *Der Formalismus* im Nachlass überliefert und hier wiedergegeben ist. Zum Abschluss des Buches kam es allerdings nicht – vermutlich aufgrund der Veränderung der Diskussionslage, die durch die Veröffentlichung von Albert Einsteins spezieller Relativitätstheorie angestoßen wurde.

4.1 Hausdorffs Rezeption der axiomatischen Methode Hilberts

Hausdorff gehörte zu den frühen Lesern der Festschrift *Grundlagen der Geometrie* von David Hilbert, die im Jahr 1899 anlässlich der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen erschien und ein Jahr später als Separatdruck im Verlag Teubner erhältlich wurde. Hausdorff war so beeindruckt, dass er in den folgenden Jahren seine Vorlesungen öfter mit axiomatischen Überlegungen einleitete, beginnend mit ersten Andeutungen in einer Vorlesung über *Wahrscheinlichkeitsrechnung* im Wintersemester 1900/1901[391], dann ausführlicher in seiner Vorlesung über *Nichteuklidische Geometrie I* im darauf folgenden Wintersemester 1901/1902, die uns im nächsten Abschnitt beschäftigen wird. Schon

[390] Die Vorlesung ist ediert in HGW, Band IA, S. 409-451. Vgl. hierzu auch die Bemerkungen Walter Purkerts in der historischen Einführung zu Band II dieser Edition sowie die biographischen Erläuterungen in HGW, Band IB, S. 622-625.
[391] Vgl. dazu HGW, Band IB, S. 611.

im Herbst 1900 hatte sich Hausdorff jedoch intensiv mit den mathematischen Einzelheiten der Hilbertschen Festschrift vertraut gemacht, wie ein am 12. Oktober 1900 an Hilbert gerichteter Brief und ein umfangreiches Notizenkonvolut in seinem Nachlass belegen. Dieses Konvolut, verzeichnet als Faszikel 1076, enthält neben einer Reihe von an Hilberts *Grundlagen* anknüpfenden Überlegungen auch einiges frühere Material, das noch in das Vor- und Umfeld von *Das Chaos in kosmischer Auslese* gehört.[392] Beides sei im Folgenden kurz dargestellt.[393]

⋆

Bei seiner Auseinandersetzung mit Hilbert standen Hausdorff neben dessen Festschrift (im Folgenden: *Grundlagen*) auch eine Kopie der autographierten Vorlesung *Elemente der Euklidischen Geometrie* zur Verfügung, die Hilbert im Wintersemester 1898/99 gehalten hatte.[394] Sie war hauptsächlich für die Teilnehmer der Vorlesung in einer Auflage von 70 Exemplaren vervielfältigt und an einige Korrespondenten Hilberts verschickt worden. Hausdorff selbst gehörte damals noch nicht dazu.[395]

In einigen der Notizen des Faszikels 1076 setzte sich Hausdorff direkt mit Hilberts *Grundlagen* auseinander. Sie zeigen, mit welchem Interesse er sich der von Hilbert verwendeten axiomatischen Methode in den Grundlagen der Geometrie zuwendete und wie er sie sich zu eigen machte. In seinem Brief an Hilbert vom 12. Oktober 1900 wies er Hilbert auf drei seiner Ansicht nach kritische Punkte in den *Grundlagen* hin.[396] Die Anmerkungen zu Hilbert sind vermutlich in den Monaten vor und nach dem Brief entstanden. Möglicherweise beschäftigte sich Hausdorff erst mit dem Erscheinen des erwähnten Separatdrucks intensiver mit Hilberts *Grundlagen*.

4.1.1 Vor dem Kennenlernen von Hilberts *Grundlagen*

In einer offenbar noch vor Kennenlernen der *Grundlagen* entstandenen Notiz (verfasst vermutlich 1898/99, ohne Separatüberschrift) skizzierte Hausdorff in sechs Punkten seine damalige Sicht der Grundlegung der Geometrie. Er stellte

[392] Es handelt sich um eine mit dem Titel „Projective Geometrie. Grundlagen, Axiome. Freie Beweglichkeit“ versehene Mappe, NL Hausdorff, Fasz. 1076.

[393] Der nachfolgende Teil von Abschnitt 4.1 wurde von Erhard Scholz (E.S.) beigetragen, dem ich hierfür herzlich danke, M.E.

[394] Hausdorffs Anmerkungen dieser Vorlesung [Hilbert 1898/1899] und zur Festschrift [Hilbert 1899] scheinen zeitlich nicht weit auseinander entstanden zu sein. Eine längere Notiz mit „Bemerkungen zu Hilberts autographierter Vorlesung: Elemente der Geometrie“ enthält schon die Kritikpunkte von Hausdorffs Brief an Hilbert vom 12. Oktober 1900, vgl. NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 31-38. Es ist nicht anzunehmen, dass sie lange vorher verfasst wurde.

[395] Vgl. [Hilbert 2004], S. 187 und 302. Otto Hölder wurde 1899 Nachfolger von Sophus Lie auf dem Leipziger Lehrstuhl für Geometrie. Eventuell machte er ein ihm möglicherweise zugesandtes Exemplar der Hilbertschen Vorlesung anderen Mitgliedern des Leipziger Mathematischen Seminars zugänglich. – Beide Schriften Hilberts sind zusammen mit weiteren und mit ausführlichen Einleitungen und Anmerkungen heute in [Hilbert 2004] zugänglich.

[396] Vgl. unten; der Brief an Hilbert ist ediert in HGW, Band IX, S. 327 f.

dabei Überlegungen zur Beziehung zwischen n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, Einbettungsfragen, Transformationsgruppen und der Beltrami-Kleinschen Auffassung der nichteuklidischen („Lobatschewsky'schen") Ebene an.[397]

Zunächst kommentierte er seine gegenüber *Das Chaos in kosmischer Auslese* präzisierte Kenntnis der Problematik von beliebigen bijektiven versus umkehrbar stetigen Abbildungen von „Zahlenmannigfaltigkeiten":

> 1) Dass der n-dimensionale Raum eine n-fache Zahlenmannigfaltigkeit, der Punkt in ihr durch n Coordinaten bestimmt sei, scheint ein eigenes Axiom zu bilden. Riemann setzt das als selbstverständlich voraus; die Beispiele von G. Cantor und G. Peano zeigen aber, dass wenn man auf eineindeutige stetige Zurordnung verzichtet, die Punkte einer Fläche, eines Würfels, einer begrenzten Mannigfaltigkeit von n Dimensionen den Punkten einer Strecke zugeordnet werden können. Cantors Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Hiernach meine Bemerkungen über Nietzsches ewige Wiederkunft zu revidieren. — Also könnten die Punkte einer n-fach ausgedehnten Raumes durch eine Variable (Coordinate) charakterisirt sein, oder durch $2, 3, \ldots$ beliebig viele.

Als nächstes verwies er auf einige ältere Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie.

> 2) Die rein logische und mathematische Untersuchung über die <u>Axiome</u> der Geometrie, ihre nothwendige und hinreichende Anzahl, ist nicht abgeschlossen. Euklid, Helmholtz, Lie u. A. haben Formulirungen aufgestellt. Keine ist definitiv.[398]

Diese Notizen sind vermutlich 1898/1899 geschrieben. Als Akteur in den Grundlagen der Geometrie war Hilbert anscheinend noch nicht in Hausdorffs Gesichtskreis eingetreten. Die weiteren Skizzenpunkte behandeln die Stichworte: 3) Invarianten von Transfomationsgruppen, 4) andere Gruppen neben der euklidischen und den beiden nicht-euklidischen Bewegungsgruppen, 5) „das quadratische Bogenelement" (Christoffel, Lipschitz, Schur, Ricci, Dedekind, Beez) und Einbettungsfragen Riemannscher Mannigfaltigkeiten in höherdimensionale Räume konstanter Krümmung (Schläfli), 6) das Cayley-Kleinsche Bild der hyperbolischen Ebene.

Am Ende des sechsten Punktes findet sich eine mit Bleistiftstrich versehene Schlussfolgerung, die eine weitere Beziehung der skizzierten mathematischen Überlegungen zu Hausdorffs erkenntniskritischer Diskussion des „thatsächlichen" Raumes im *Chaos* herstellte.[399]

> Nun aber: Wie wenn die thatsächliche Ebene dem Lob[atschewski]schen Raume angehört, die Messungen aber an ihrer euklidischen Abbildung

[397] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 52-54.

[398] Fasz. 1076, Blatt 52; Unterstreichung hier wie im Weiteren im Original.

[399] Es ist nicht entscheidbar, ob der Bleistift eine Streichung oder eine Hervorhebung markieren sollte.

[soll heißen: im Cayley-Kleinschen Bild, E.S.] euklidisch vor sich gehen? Oder umgekehrt? Also immer wieder: nicht die thatsächliche Beschaffenheit des Raumes, sondern die Beschaffenheit der Messungen ist „massgebend“.[400]

Wir können daraus ablesen, wie sehr Hausdorffs Hinwendung zu den Grundlagen der Geometrie zunächst von den im *Chaos* aufgeworfenen Fragestellungen geprägt war.

In einer weiteren, von Hausdorff eigenhändig überschriebenen Notiz „Nachtrag zu meinem Raumcapitel (Chaos, V)“ findet sich ein erster Hinweis auf eine frühere Arbeit Hilberts über Grundlagenfragen der Geometrie. Hausdorff eröffnete die Notiz mit der Bemerkung

> Obwohl die dort gegebenen Verallgemeinerungen, selbst ohne Herbeiziehung der nichteuklidischen Geometrie, genügen, um das Nichtvorhandensein einer bestimmten Raumconstitution an sich zu beweisen, so lässt sich noch mehr behaupten.[401]

Hausdorff/Mongré hatte in seinem Buch argumentiert, dass es denkbar sei, dass die „empirische Raumanschauung“ auf einer euklidischen Metrik beruhe, während zugleich die „transzendente Raumbeschaffenheit“ als ein beliebiges, auch gekrümmtes „Gebilde in einem euklidischen Raume von mehr als drei Dimensionen aufgefasst werden“ könne.[402] Nun merkte er an, dass man den „transzendenten Raum“ nicht einmal als Riemannsche Mannigfaltigkeit denken müsse, sondern ihn auch mit einem biquadratischen (quartischen) Linienelement versehen könne oder allgemeiner mit einer homogenen Funktion erster Ordnung der Koordinatendifferentiale (in späterer Terminologie also mit einer Finslermetrik).[403]

Er fügte hinzu, dass in einer solchen Mannigfaltigkeit mit nichtquadratischem Linienelement keine freie Beweglichkeit mehr vorliegt. Dagegen gelte:

> Die Mannigfaltigkeiten mit quadratischem Linienelement sind „in den kleinsten Theilen eben“, d.h. besitzen im Infinitesimalen freie Beweglichkeit und befolgen dort die euklidische Geometrie.[404]

Auf diese Verallgemeinerungen Riemannscher Mannigfaltigkeiten als Kandidaten für seinen fiktiven „transzendenten Raum“ war Hausdorff durch das Studium einer Arbeit Hilberts gestoßen.[405] Noch schien ihm die wichtigste Lehre daraus auf der Linie seiner eigenen philosophischen Überlegungen zu liegen:

> Also: Der Raum an sich eine M_3 mit dem Linienlement (4) [Finslermetrik, E.S.], der empirische Raum trotzdem eine M_3 mit dem L[inien]el[emen]t

[400] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 54.
[401] Ebd., Blatt 46.
[402] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 122.
[403] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 46.
[404] Ebd., Blatt 46v.
[405] „Hilbert's Massbestimmung in der Ebene (Ann. 46), bei der die Geraden kürzeste Linien sind [...] führt auf nichtquadr[atische] L[inien]el[emen]te.“ Ebd., Blatt 47.

> $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$. Den „Raum an sich" würden wir dann, wenn wir ihn zu Gesichte bekämen, überhaupt nicht in der uns geläufigen Weise metrisch betrachten können.[406]

Unter „uns geläufige Weise" verstand er dabei ein „Gebilde in einem höheren Raum const[anten] Krümmungsmasses".[407] Hausdorff scheint um diese Zeit eine „Zahlenmannigfaltigkeit" also erst dann als geometrisch angesehen zu haben, wenn sie durch eine Einbettung in einen euklidischen, sphärischen oder hyperbolischen Raum angegeben war oder zumindest angegeben werden konnte.

Die Notiz ist wohl 1898 oder 1899 geschrieben. Nichts deutet darauf hin, dass Hausdorff schon bekannt war, wie nahe Hilbert dem Ziel einer *definitiven* neuen Axiomatisierung der Geometrie (wenn auch nicht der einzig möglichen) zu dieser Zeit schon gekommen war.[408]

4.1.2 Hausdorffs Aufnahme der axiomatischen Methode

Im Laufe der Jahre 1899/1900 änderte sich das, wie viele Notizen des hier besprochenen Konvoluts belegen.[409] Auf einer charakteristischen Notiz, überschrieben mit dem einzigen Wort „Hilbert", stellte Hausdorff eine Liste spezieller Geometrien zusammen – in Hausdorffs Bezeichnungen: „pseudosphärische", „elliptische", „sphärische", „Geometrie der Halbkugel" mit Ausschluss des ganzen oder halben Äquators, „Klein-Clifford", „$dx^4 + dy^4 + dz^4$ (Minkowski)", „Geometrie des Körpers Ω", bzw. „$\Omega(t)$"[410] – und fügte jeweils die Axiome oder Axiomengruppen in Hilberts Bezeichnung hinzu, die in der jeweiligen Geometrie *nicht* gelten. Hausdorff scheint von Hilberts Gruppierung der Axiome und den skizzierten Unabhängigkeitsbeweisen begeistert gewesen zu sein. Er kommentierte die Übersicht mit den Worten:

> Reinheit der Methode: Was kann man mit diesen Hülfsmitteln, ohne jene, beweisen? Manchmal Spiel auf der G-Saite![411]

Hausdorffs erste Anmerkungen zur Einordnung des Satzes von Desargues stellten einen anderen Zusammenhang her als bei Hilbert diskutiert. In Hilberts *Grundlagen* besaß der Satz eine Schlüsselstellung für die Einführung der Streckenrechnung mit der Struktur eines Schiefkörpers oder sogar eines Körpers

[406] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 47.

[407] Hausdorff fügte hinzu: „wenigstens nicht als Gebilde, das durch differentiirbare Gleichungen bestimmt ist".

[408] Vgl. [Hilbert 1898/1899].

[409] Möglicherweise veranlasst durch das Erscheinen des Separatdruckes der *Grundlagen* im Oktober 1899. Wie wir in Abschnitt 4.2. sehen werden, hielt Hausdorff noch im Wintersemester 1899/1900 eine Vorlesung über *Ausgewählte Capitel der höheren Geometrie*, die *keine* Erwähnung der *Grundlagen* enthielt.

[410] Dabei verwendete Hausdorff die Hilbertsche Bezeichung Ω für die pythagoreische Vervollständigung der rationalen Zahlen, d.h. den kleinsten Körper $\Omega \supset \mathbb{Q}$, der unter der Operation $(x, y) \in \Omega^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \in \Omega$ abgeschlossen ist.

[411] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 5. Dies war eine Anspielung auf virtuoses Spiel in hohen Lagen auf der tiefsten Saite der Violine, das Niccolo Paganini (1782-1840) berühmt gemacht hatte; vgl. auch Egbert Brieskorns Bemerkungen hierzu in HGW, Band IB, S. 495 f.

(falls das Prinzip von Pappos/Pascal gilt). Des Weiteren diente er als Kriterium dafür, ob eine Ebene in einer räumlichen Inzidenzstruktur der *Grundlagen* liegt oder nicht.[412] Hausdorff stellte diese Einsicht demgegenüber zunächst in den Kontext der Struktursätze für Räume konstanter Krümmung:

> Folgende Sätze hängen zusammen:
>
> Schur. Ein Raum dessen geodätische Flächen (gebildet von den ∞^1 geodätischen Linien durch einen Punkt, die ein Büschel bilden) ∞^2 geodätische Linien enthalten, hat constantes Krümmungsmass.
>
> Beltrami. Eine Fläche, die auf die Ebene geodätisch abbildbar ist, hat constantes Krümmungsmass.
>
> Zushg. durch Hilberts Darlegungen über den Desargues'schen Satz. In einer Fläche, die auf die Ebene geodätisch abbildbar ist, gilt der Desargues (für die geodät. Linien). Das ist aber die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Fläche als Theil eines Raumes aufgefasst werden kann, in der die Verknüpfungsaxiome I 1-6 gelten.[413]

In Hausdorffs Lektüre bahnten also Hilberts *Grundlagen* zunächst einen Weg für die Beanwortung der Frage, ob eine Beltramische Fläche konstanter Krümmung als zweidimensionale Untermannigfaltigkeit eines (dreidimensionalen) Raumes konstanter Krümmung eingebettet werden kann. Darüberhinaus verschaffte er sich aber auch eine Übersicht über die von Hilbert dargelegten Möglichkeiten, die Sätze von Desargues beziehungsweise von Pappos/Pascal in der Ebene oder im Raum mit oder ohne Kongruenzaxiomen zu begründen.[414]

Hilberts Methode der Unabhängigkeitsbeweise von Axiomen durch Betrachtung von mehr oder weniger ausgefallenen Beispielen von mathematischen Systemen, welche einen Teil der Axiome erfüllten, andere wiederum nicht, kam dem „apagogischen“ Denkstil entgegen, den Hausdorff in *Das Chaos in kosmischer Auslese* entwickelt hatte. Dort war es freilich darum gegangen, philosophisch-metaphysische Annahmen, die Hausdorff gewissermaßen als ontologische Axiome behandelt hatte, als nicht denknotwendig nachzuweisen. Nun schärfte er seinen mathematischen Geist an Hilberts und an eigenen Gegenbeispielen für einzelne Axiome. In einer etwas längeren Notiz, überschrieben „Bemerkungen zu Hilberts autographirter Vorlesung: Elemente der Geom.“[415], finden sich dann auch die Kritikpunkte formuliert, die Hausdorff in seinem Brief vom 20. Oktober 1900 an Hilbert vorbringen sollte (dazu gleich mehr).

Auf Seite 43 der autographierten Vorlesung hatte Hilbert das Prinzip der Dreieckskongruenz SWS (Seite – Winkel – Seite), hier bezeichnet als Axiom (10), diskutiert und dessen Unabhängigkeit von den anderen Inzidenz- und Kongruenzaxiomen anhand eines Beispiels mit deformierter Winkelkongruenz gezeigt.[416] Hausdorff kommentierte:

---

[412] Vgl. [Toepell 1986], für eine gute Übersicht auch [Gray 2008], S. 179 ff.

[413] NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 13. Hausdorff bezog sich hier auf die Arbeiten [Schur 1886] und [Beltrami 1866].

[414] Eine übersichtliche Zusammenstellung dieser Möglichkeiten findet sich auf Blatt 9 des Faszikels 1076.

[415] Ebd., Blatt 31-38.

[416] [Hilbert 1898/1899], S. 43, bzw. [Hilbert 2004], S. 325.

> (10) ist das Axiom der „freien Beweglichkeit“ und gilt daher nicht für die Geometrie auf irgend einer Fläche nichtconstanten Krümmungmasses.[417]

Er schränkte dabei die Betrachtung ein auf „ein hinlänglich kleines Stück der Fläche (sodass zwei „Geraden“ nur einen Punkt gemeinsam haben können)“; dann waren die ebenen Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiome bis auf (10) erfüllt. Für den räumlichen Fall führte er — modern formuliert – eine lineare Finslergeometrie mit quartischem Linienelement an:

> Will man auch die räumlichen Axiome I mit haben, so kann man folgende Geometrie wählen: Punkte, Gerade, Ebenen seien die Punkte, Gerade, Ebenen, des euklidischen Raumes; als „Entfernungen“ (deren Gleichheit die Streckencongruenz bedingt) werde aber der Ausdruck $\sqrt[4]{(x_2-x_1)^4+(y_2-y_1)^4+(z_2-z_1)^4}$ angesehen; die Winkel mögen euklidisch gemessen werden. Hier ist keine freie Beweglichkeit möglich; nicht einmal im Infinitesimalen. Das Axiom (10) gilt nicht mehr [...].[418]

Hausdorff rechnete vor, dass zwei gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke, beide mit Kathetenlängen 1, aber um $\frac{\pi}{2}$ gegeneinander gedreht, verschiedene Hypothenusenlängen haben. Weitere Punkte folgten, etwa zur Dreiecksungleichung:

> Zu p. 51. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte. Dieser Satz (Gerade – kürzeste Linie) verdient eine eigene Untersuchung. Von dem ebenen Congruenzaxiom (10) kann er nicht abhängen (daher die Stelle die ihm H. zuweist, nicht methodisch richtig ist); denn er gilt z.B. in der soeben entwickelten Geometrie mit biquadratischem Linienelement $ds^4 = dx^4+dy^4+dz^4$, in welcher die Geraden geodätische Linien sind. Aber er ist auch keine Folge der übrigen Axiome ohne (10), wie man an folgender Geometrie erkennt. [...].[419]

Die „folgende Geometrie“ ging von der euklidischen Ebene aus, wobei aber die Streckenlängenmessung durch einen von der Lage der Geraden abhängigen Faktor modifiziert war, etwa $(1+p^2)$, wo p der Abstand der Geraden von einem fest gewählten Bezugspunkt O ist. In dieser Geometrie gelten insbesondere Hilberts Streckenkongruenzaxiome, nicht jedoch SWS (Axiom 10) und nicht die Dreiecksungleichung. Weitere Beispiele mit anderen „Entfernungsbestimmungen, bei denen das Axiom von der Streckensumme III (Axiom 3) gilt, nicht aber Congruenz und kürzeste Gerade“, folgten.[420]

Bei der Konstruktion dieser Gegenbeispiele scheint sich Hausdorff überzeugt zu haben, dass „Entfernungsbestimmungen“, welche die Dreiecksungleichung respektieren (in späterer Formulierung Metriken), einen eigenständigen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie eröffnen. In einer anderen Notiz begann er mit der Erkundung eines solchen Zugangs zu den Grundlagen über eine Metrik, ohne ihn allerdings zum Abschluss zu bringen.[421]

---

[417]NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 31v.
[418]Ebd., Blatt 31v-32.
[419]Ebd., Blatt 32v.
[420]Ebd., Blatt 33v.
[421]Vgl. Abschnitt 4.1.5.

4.1.3 Der Brief an Hilbert vom 12. Oktober 1900

Seine kritischen Anmerkungen teilte Hausdorff schließlich am 12. Oktober 1900 Hilbert brieflich mit, nicht ohne dem Adressaten seine grundsätzliche Übereinstimmung und Bewunderung auszudrücken:

> Sehr geehrter Herr Professor!
>
> Gestatten Sie mir einige Bemerkungen zu Ihrer Festschrift-Abhandlung über die „Grundlagen der Geometrie", zu deren aufrichtigen Bewunderern ich mich zählen darf. Sie müssen es dem höchstgesteigerten Kriticismus zuschreiben, den die Lectüre Ihrer Schrift als philosophische Grundstimmung hinterlässt, wenn sogar in Ihren eigenen überaus scharfsinnigen und vorsichtigen Formulirungen irgend eine Kleinigkeit nicht völlig correct erscheint. [...][422]

Die drei Punkte betrafen (1) die Formulierung von Hilberts Axiom I.2,

> (I) 2. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade; d.h. wenn $AB = a$ und $AC = a$ und $B \neq C$, so ist auch $BC = a$.[423]

ferner (2) den Unabhängigkeitsbeweis von Axiom I.5,

> (I) 5. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt die Gerade a vollständig in der Ebene, d.h. jeder Punkt von a liegt in α.[424]

und schließlich die Formulierung des Axioms I.7:

> Auf jeder Geraden giebt es wenigstens zwei Punkte, in jeder Ebene wenigstens drei nicht auf einer Gerade gelegene Punkte und im Raum giebt es wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

Hinzu trat am Ende des Briefes ein Hinweis auf Hausdorffs Überlegungen zur Rolle der Dreiecksungleichung (siehe oben) und der Vorschlag, das Kongruenzaxiom SWS seiner Wichtigkeit wegen mit einem „eigenen Namen" zu versehen und es als „Axiom der freien Beweglichkeit" zu bezeichnen.

Unter (1) wies Hausdorff darauf hin, dass die Zusatzformulierung in I.2 („d.h. ... ") schwächer ist als die davor stehende Formulierung. Dazu gab er ein Beispiel für eine Inzidenzgeometrie an, in der die Bedingung

$$(*) \qquad AB = a \wedge AC = a \wedge B \neq C \longrightarrow BC = a$$

[422] Felix Hausdorff an David Hilbert, 12. Oktober 1900, in HGW, Band IX, S. 327 f.

[423] [Hilbert 1898/1899], S. 6 und [Hilbert 1899], S. 6 bzw. [Hilbert 2004], S. 305 und 438.

[424] Der Unabhängigkeitsbeweis findet sich in [Hilbert 1898/1899], S. 10 bzw. [Hilbert 2004], S. 307, jedoch nicht mehr in [Hilbert 1899].

erfüllt ist, ohne dass je zwei verschiedene Punkte eine Gerade eindeutig festlegen.[425]

In seiner Kritik zu Punkt (2) wies er darauf hin, dass das von Hilbert in der autographierten Vorlesung angegebene Beispiel, das die Unabhängigkeit des Axioms I.5 von I.1-4 zeigen sollte, ungeeignet war. Es verletzte nämlich nicht nur Axiom I 5, sondern auch I.3 und I.4. Hausdorff gab ein Beispiel an, das diesen Defekt nicht besitzt.[426]

In seinem dritten Punkt schließlich erklärte Hausdorff Hilberts Axiom I.7 als weitgehend redundant: „Ihr Axiom I 7 halte ich, bis auf den vom Raum handelnden Schlusssatz, für einen Pleonasmus [...]“. Das klingt heute (und klang wahrscheinlich auch schon für Hilbert) überraschend. Hausdorffs Kritik beruhte auf einer inhaltlichen, nicht auf einer logischen Leseweise der Hilbertschen Formulierung des Axioms I.2 (und analog I.3 für drei nichtkollineare Punkte, die eine Ebene „bestimmen“). Dabei unterstellte er die Existenz der in Frage stehenden Punkte als selbstverständlich:

> Nach Ihrer Definition heisst doch „ein Punkt liegt auf einer Geraden a“ nicht anderes als „es existirt ein Punkt $B \neq A$, derart dass A, B die Gerade bestimmen“; dann „liegt“ aber auch B „auf a“, und a trägt mindestens die zwei Punkte A, B. Dasselbe gilt von der Ebene. Ihr Axiom sagt also nur, dass jedes Individuum des Geraden- resp. Ebenensystems in Beziehung zu den Individuen des Punktsystems steht, oder dass es keine punktlosen Geraden oder Ebenen giebt.

Dass die von Hausdorff angesprochene (Inzidenz-) „Beziehung“ von Individuen der Geraden- oder Ebenenmenge zur Punktmenge auch dann nicht zu „punktlosen Individuen“ führt, wenn sie nur mit einem Punkt (bei Geraden) oder zweien (bei Ebenen) inzidieren, kam Hausdorff nicht in den Sinn.[427] Die Plethora von endlichen Inzidenzgeometrien hatte sich den Mathematikern im Jahr 1900 noch nicht eröffnet. Hilbert war aber dennoch aus rein formaler Sicht vorsichtig genug, die minimalen Existenzforderungen in seinen Axiomen festzuschreiben.

Hilbert nahm Hausdorffs Kritik zu Protokoll. Auf dem Deckblatt seines eigenen Exemplars der autographierten Vorlesung vermerkte er (neben weiteren

[425]Hausdorffs Beispiel verwendete die Punktmenge $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2 \setminus \{M, N\}$, $M, N \in \mathbb{R}^2$, $M \neq N$, während die Geradenmenge $\mathcal{G}$ aus den affinen Geraden des $\mathbb{R}^2$ besteht, die *nicht* durch M gehen, sowie den Kreisen des $\mathbb{R}^2$ durch die Punkte A, B, N, falls M auf der affinen Geraden durch A und B liegt. Hier ist $(*)$ erfüllt, während durch zwei verschiedene Punkte A, B eines Kreise von $\mathcal{G}$ noch eine weitere („klassische“) Gerade verläuft, wenn A, B, M nicht affin kollinear sind.

[426]Es handelte sich um eine räumliche Inzidenzgeometrie, gebildet aus dem affinen $\mathbb{R}^3$ bei Auszeichnung einer Ebene ε und einem „Linienzug“ l in ε, der von jeder affinen Geraden in ε entweder nicht oder in genau zwei Punkten getroffen wird (etwa l ein Paar paralleler Geraden in ε). Hausdorffs Beispiel verwendete die Punktmenge $\mathcal{P} = (\mathbb{R}^3 \setminus \varepsilon) \cup l$, die Geradenmenge $\mathcal{G}$ betehend aus den affinen Geraden in $\mathbb{R}^3 \setminus \varepsilon$ sowie l als *eine* Gerade; die Ebenenmenge $\mathcal{E}$ gebildet von den affinen Ebenen von $\mathbb{R}^3$ mit Ausnahme von ε.

[427]Die Prämissen von I.2 bzw. I.3 sind dann für solche Geraden bzw. Ebenene schlicht nicht erfüllt, also insbesondere für einen „Existenzbeweis“, wie ihn Hausdorff zu geben versuchte, ungeeignet.

Anmerkungen) „Vgl. die an mich gerichteten Briefe von Hausdorff u. Liebmann".[428] Die von Hausdorff monierte Zusatzklausel in Axiom I.2 strich er in der 1903 erschienenen zweiten Auflage der Festschrift. Hausdorffs Kritikpunkt (2) traf schon auf die erste Auflage der Festschrift nicht mehr zu. Kritikpunkt (3) wird Hilbert wohl kaum eingeleuchtet haben. Ebenso blieben Hausdorffs Hinweise auf die Rolle der Dreiecksungleichung und die Namensgebung des Kongruenzaxioms SWS ohne weitere Auswirkungen.

4.1.4 Ansätze der Weiterführung

Hausdorff begnügte sich nicht mit Rezeption und Kritik der Hilbertschen Axiomatik. Er begann in mindestens zwei Hinsichten, die Grundlegung der Geometrie selber ein Stück weiter zu verfolgen. Die Rolle der *Entfernungsbestimmungen* in den Modellen der Geometrie erschien ihm wichtig genug, dass er in einem Fragment überschrieben mit „Axiome der Geometrie" einen Zugang zur Definition von Geraden und Ebenen über axiomatisch fundierte metrische Konzepte skizzierte.[429] Auf der anderen Seite analysierte er die von Hilbert angegebenen Inzidenzstrukturen, die ihm grundlegend für den „Aufbau der projectiven Geometrie" (so die Überschrift einer weiteren Notiz[430]) schienen, auch metrikfrei. Bei beiden Ansätzen handelte es sich um Skizzen, die nicht den Anspruch einer besonderen Forschungsleistung oder gar einer vollgültigen Axiomatik der Geometrie erhoben. Dennoch enthielten sie Keime für spätere Verallgemeinerungen.

In „Axiome der Geometrie" forderte Hausdorff in den beiden ersten Axiomen (1) und (2) die Zuordnung einer „reellen Zahl" $AB = BA$ (so notiert!) zu jedem Punktepaar (A, B) mit denjenigen Eigenschaften, die er 14 Jahre später in den *Grundzügen der Mengenlehre* nur leicht umgruppiert als „Entfernungsaxiome" eines metrischen Raumes definieren würde.[431] Er erklärte einen Punkt Q (oder mehrere Punkte $P_1, \ldots, P_k$) als auf der *Strecke* und *zwischen* A und B liegend, falls die metrische Bedingung $AQ + QB = AB$ (beziehungsweise $AP_1 + P_1P_2 + \ldots + P_kB = AB$) erfüllt ist und postulierte die Existenz von Punkten P zwischen A und B. Dies erlaubte die Einführung der Relation der *Kollinearität* $\overline{ABC}$ von drei Punkten und der *Geraden* durch A und B. Postulat (4) sicherte die kollineare Kompatibilität für 4 Punkte wie folgt:

$$(4) \qquad \overline{ABC} \text{ und } \overline{ABD} \quad \longrightarrow \quad \overline{ACD} \text{ und } \overline{BCD}$$

Die *Koplanarität* von 4 Punkten A, B, C, D ließ sich dann nach dem Vorbild des Vorgehens in der projektiven Geometrie dadurch erklären, dass mindestens ein Paar „gegenüberliegender" Seiten des vollständigen Vierecks A, B, C, D einen

[428][Hilbert 2004], S. 396. Eine Antwort Hilberts an Hausdorff ist jedoch nicht erhalten.
[429]NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 24-30.
[430]Ebd., Blatt 38-45
[431]*Grundzüge*, S. 211. Postulat (1) forderte die (strikte) Positivität und Symmetrie; (2) die Dreiecksungleichung. Vgl. dazu auch Abschnitt 5.3.2.

Schnittpunkt besitzt. Hausdorff führte dafür die sparsame und suggestive Notation $\underline{ABCD}$ ein und forderte eine koplanare Kompatiblität wie folgt:

$$(5) \qquad \underline{ABCD} \text{ und } \underline{ABCE} \text{ und nicht } \overline{ABC} \quad \longrightarrow \quad \underline{ABDE}$$

Damit konnte er zeigen, dass mit zwei Punkten A und B, die zwei Ebenen gemeinsam sind, auch die durch A und B gehende Gerade (alle mit A, B kollineare Punkte) den beiden Ebenen gemeinsam ist. Abgerundet wurde sein hier entwickeltes Axiomensystem durch das Postulat „(6) Haben zwei Ebenen einen Punkt gemeinsam, so haben sie auch noch einen zweiten Punkt gemeinsam.“[432]

Damit hatte Hausdorff ausgehend von einem (erst später so bezeichneten) *metrischen Raum* den Zugang zu großen Teilen der Hilbertschen Axiome der Gruppen I und II (Inzidenz- und Anordnungsaxiome) gebahnt. Es fehlten lediglich Hilberts Axiom I.7 zur Sicherung der Existenz von mindestens drei nicht kollinearen und im „räumlichen“ Fall von 4 nicht koplanaren Punkten[433] und Hilberts Fassung des Axioms von Pasch (Axiom II.5).[434] Es sieht ganz danach aus, als hätte Hausdorff die Axiome eines metrischen Raumes zum erstenmal bei der Untersuchung der Grundlagen der Geometrie im Hilbertschen Sinne formuliert. Diese Axiome entstanden hier aus der Verallgemeinerung verschiedener Typen von Beispielen zur Untersuchung der Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit der Hilbertschen Axiome.[435]

In seinem Fragment „Aufbau der projectiven Geometrie“ verschaffte sich Hausdorff einen Überblick über die Begründung der projektiven Geometrie.[436] Das Fragment ist, wie die anderen auf Hilbert Bezug nehmenden Notizen des Konvoluts, um 1900/1901 entstanden. Erst fünf bis zehn Jahre später erfolgte ein entscheidender weiterer Ausbau der Axiomatik der projektiven Geometrie, unter anderem durch die Beiträge [Hessenberg 1905] und [Veblen/Young 1908]. Hessenberg entdeckte die fundierende Bedeutung des Satzes von Pappos/Pascal für die *ebene* projektive Geometrie. Er bemerkte, dass letzterer nicht nur (wie schon von Hilbert betont) die Kommutativität der Streckenrechnung zur Folge hat, wenn der Satz von Desargues anderweitig gesichert ist,[437] sondern selbst schon den Satz von Desargues impliziert. Lediglich im nicht-Pascalschen (und damit nichtkommutativen) Fall musste man für die projektive Ebene das archimedische oder ein anderes „Stetigkeitsaxiom“ (Hilberts Bezeichnung) zur Sicherung der projektiven Konstruktionen heranzuziehen. Der Rahmen der Arbeit von Veblen und Young war viel weiter gesteckt; die beiden Autoren

[432]NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 30.

[433]Hausdorff betrachtete dieses Axiom, wie wir oben gesehen haben, fälschlicherweise als einen „Pleonasmus“. Dementsprechend erwähnte er es auch hier nicht.

[434]Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten in verschiedenen Halbebenen zu einer Gerade schneidet letztere.

[435]Insbesondere bezogen auf die eukldidsche, Riemannsche und quartische Finslermetrik im linearen Raum.

[436]NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 38-45.

[437]Etwa im räumlichen Fall oder bei Gültigkeit des archimedischen Axioms.

gaben eine Axiomatisierung der projektiven Geometrie unter Einschluss der endlichen Geometrien und beliebiger Dimension an.[438]

Diese Weiterführungen der axiomatischen Grundlegung der projektiven Geometrie konnte Hausdorff bei der Abfassung seiner Notizen noch nicht kennen. Er schloss vielmehr an eine Bemerkung Hilberts an, dass die Axiomengruppen I und II (Inzidenz und Anordnung) auch die „wesentlichen" Grundlagen der projektiven Geometrie bildeten und nur noch ein „Stetigkeitsaxiom" hinzuzufügen sei,[439] arbeitete aber im Unterschied zu diesem die spezifisch projektiven Inzidenzbeziehungen deutlich heraus.

Am Anfang der Notiz findet sich – zwischen Querstrichen eingeschlossen, gewissermaßen zur Erinnerung – eine komprimierte Zusammenfassung der Hilbertschen Auffassung, aber mit einer von Hilbert nicht verwendeten Spezifizierung des Vollständigkeitsaxioms:

> I. Hilberts Axiome der Verknüpfung 1–6.
> II. Hilberts Axiome der Anordnung 1–5.
> III. Dedekinds Stetigkeitsaxiom.[440]

Darüber stellte Hausdorff eine Liste von 8 Inzidenzprinzipien auf, welche die Punkt-Ebene im projektiven Raum und die Spezifik der Geradeninzidenz in einer projektiven Ebene deutlich machten. In einer Randbemerkung stellte er die Frage, ob diese Prinzipien als Axiom dienen konnten oder sollten. Auch war die Formulierung noch nicht logisch präzisiert. Es folgen Notizen über „Harmonische Elemente", „perspective Lage" und den „Fundamentalsatz" der projektiven Geometrie.[441] Die letzten Seiten der Notiz enthalten den Entwurf eines Axiomensystems für (nicht-endliche) projektive Räume. Er ist in Mengensprache abgefasst und beginnt mit den Worten:

> Wir denken eine unendliche Menge von Elementen: die Elemente heissen Punkte, die Menge heisst Raum.[442]

Auf der Punktmenge führte Hausdorff je eine zweistellige, eine dreistellige und eine vierstellige Relation ein (das Zusammenfallen von zwei Punkten, die Kollinearität von drei Punkten, und die Koplanarität von vier Punkten), deren Eigenschaften er durch 10 Axiome fixierte, die an die Stelle der Hilbertschen Axiome der Gruppen I, II treten sollten. Sein Axiom IX sicherte unter anderem die Existenz nicht koplanarer Punkte zu drei Punkten und damit die Einbettung der zugehörigen Ebenen in einen projektiven (dreidimensionalen) Raum. Nach Hilberts Analyse war damit die Gültigkeit des Satzes von Desargues gesichert. Die Einführung einer Streckenrechnung wie bei Hilbert und von (möglicherweise nichtkommutativen) projektiven Koordinaten, ähnlich wie später bei Veblen und Young skizziert, scheint in greifbarer Nähe. Hausdorff

438 Vgl. [Gray 2008], S. 181-184 sowie [Voelke 2010].
439 [Hilbert 1898/1899], S. 33 bzw. [Hilbert 2004], S. 319.
440 NL Hausdorff, Fasz. 1076, Blatt 38.
441 Ebd., Blatt 38-41.
442 Ebd., Blatt 42.

ließ es aber – zumindest in dem uns überlieferten Nachlassbestand – mit dieser ersten Einführung der projektiven Grundbegriffe bewenden und verfolgte die Axiomatisierung der projektiven Geometrie nicht weiter. Sie spielte auch in seiner Vorlesung über *Nichteuklidische Geometrie* im WS 1901/02, die im nächsten Abschnitt besprochen wird, keine Rolle mehr.

4.1.5 Eine Zwischenbilanz

Hausdorffs Notizen in Faszikel 1076 des Nachlasses zeigen sehr schön, wie er sich zunächst mit Fragen nach ausgefallenen Raumstrukturen beschäftigte, auf die er zunächst im Rahmen der philosophischen Überlegungen zur Kritik an einem vorgefassten Konzept des „absoluten“ Raumes gestoßen war. Dies hat offenbar seinen Weg in das Feld der Grundlagenstudien der Geometrie geprägt, bis er Hilberts Vorlesung von 1898/99 und dessen Festschrift kennenlernte. Allem Anschein nach geschah das im Jahr 1900, nicht lange vor seinem oben beschriebenen Brief an Hilbert. Hilberts axiomatische Methode zog Hausdorffs Aufmerksamkeit auf sich und regte ihn zu eigenen Studien an, mit eigenenen Beispielen und Gegenbeispielen zu einzelnen Axiomen und Axiomengruppen, und mit eigenen Ansätzen zur Axiomatisierung der Geometrie. Noch wurden diese Beispiele nicht „Modelle“ der jeweiligen Systeme von Axiomen genannt. Wir werden jedoch in Abschnitt 4.2 verfolgen können, wie Hausdorff in einem bestimmten, eingeschränkten Sinn – im Zusammenhang der Diskussion der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrien – von „Modellen“ zu sprechen begann und so die spätere Terminologie teilweise vorwegnahm.

Bei seinem Versuch, einen eigenen Zugang zu den Grundlagen der Geometrie zu entwerfen, formulierte er auch zum ersten Mal und eher beiläufig die Axiome einer *Metrik* und ergänzte sie um Zusatzforderungen, welche die Existenz von geraden- und ebenenartigen Unterobjekten sicherten. Ebenso entwarf er ein eigenständiges *Axiomensystem projektiver Räume* mit unendlichen Punktmengen. Hausdorff machte sich so die axiomatische Methode zu eigen und verfolgte sie in eigener Ausrichtung, geprägt nicht zuletzt auch durch sein heranreifendes Interesse an der Cantorschen Mengenlehre.

Die 1903 gedruckte zweite Auflage von Hilberts *Grundlagen* enthielt in ihrem Anhang einen Wiederabdruck von Hilberts Arbeit aus den *Göttinger Nachrichten* mit einer Einführung von Umgebungsaxiomen für die Ebene.[443] In seinem Vorlesungsmanuskript *Nichteuklidische Geometrie* fügte Hausdorff bei seinem Literaturverweis auf die *Grundlagen* zwischen den Zeilen die Ergänzung „2. Aufl. Leipzig 1903“ ein.[444] Dies ist der einzige uns bekannte Hinweis auf die überarbeitete Fassung von Hilberts Festschrift in Hausdorffs Nachlass. Ebensowenig gibt es darin Aufzeichnungen, die auf eine detailliertere Kenntnisnahme und Beschäftigung mit Hilberts Studien über die Grundlagen der Geometrie aus den Jahren 1902/1903 mit den Umgebungsaxiomen der Ebene hindeuten würden.

[443] [Hilbert 1902], wiederabgedruckt in [Hilbert 1903].
[444] NL Hausdorff, Fasz. 14, Blatt 5.

Als Hausdorff bei seinen Studien zu Riemannschen Flächen im Wintersemester 1911/12 Umgebungssysteme einführte und bemerkte, dass sie sich auch für die Charakterisierung allgemeinerer topologischer Räume eigneten, knüpfte er nicht direkt an Hilberts Bemerkungen zu Umgebungssystemen in der Ebene an.[445] Nichts spricht dafür, dass Hausdorff diese in den Jahren 1902/03 auch nur annähernd so interessiert und intensiv zur Kenntnis genommen hätte wie wenige Jahre vorher die Arbeiten zu den Grundlagen der Geometrie. Offenbar entdeckte er den Zugang zu topologischen Konzepten durch Umgebungen im Jahr 1912 wieder neu, ohne an Hilberts Bemerkungen von 1903 anzuschließen.

4.2 Vorlesungen und Arbeiten zur nichteuklidischen Geometrie

Seit dem Beginn seiner Vorlesungstätigkeit in Leipzig las Hausdorff auch über Themen der Geometrie. An der Reihe seiner Vorlesungen, Veröffentlichungen und Notizen zum Thema der nichteuklidischen Geometrien lässt sich eine schrittweise, über die Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* hinausgehende und die formale Axiomatik aufgreifende Klärung seiner erkenntniskritischen Haltung zum Problem des Raumes verfolgen, die sich schließlich auch in einer neuen Reflexion des Zeitbegriffs ausdrückte, wie wir später sehen werden.

4.2.1 „Analytische Beiträge“

Die nichteuklidischen Geometrien wurden in Hausdorffs Vorlesungen erstmals in einer Vorlesung des Wintersemesters 1899/1900 mit dem Titel *Ausgewählte Capitel der höheren Geometrie* angesprochen.[446] Hausdorff behandelte in dieser Vorlesung nach einer Einführung in die Idee der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten die Kreisgeometrie in der ebenen, sphärischen und pseudosphärischen (hyperbolischen) Geometrie und gab einen Überblick über die analytische Trigonometrie in diesen drei Geometrien. Darüber hinaus diskutierte er die Beziehungen zwischen ihnen anhand konformer Abbildungen einerseits, im Rahmen der Cayley-Kleinschen Maßbestimmung andererseits.

Die Vorlesung stützt sich auf einen etwa ein halbes Jahr früher fertiggestellten Aufsatz, der zugleich Hausdorffs einzige mathematische Veröffentlichung über nichteuklidische Geometrie bleiben sollte. In der Sitzung vom 6. März 1899 hatte Heinrich Bruns der mathematisch-physikalischen Klasse der Sächsischen Akademie der Wissenschaften Hausdorffs Aufsatz „Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie“ vorgelegt.[447]

[445] Vgl. dazu den Kommentar „Zum Begriff des topologischen Raumes“ in HGW, Band II, S. 708 ff.

[446] NL Hausdorff, Fasz. 8.

[447] Der Aufsatz [H1899a] erschien in den *Berichten über die Verhandlungen der königlich-sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, math.-phys. Classe* 51 (1899), 161-214; er ist hier im Band wiedergegeben.

Zentrales mathematisches Werkzeug der „Analytischen Beiträge“ und der damit in Verbindung stehenden Vorlesung sind die von Wilhelm Killing in mehreren Schriften, u.a. in seiner Monographie *Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig 1885) verwendeten sog. „Weierstrass'schen Koordinaten“ in der hyperbolischen Ebene (Hausdorff schreibt: „Lobatschefskij'schen Ebene“). Wählt man in derselben einen „Anfangspunkt“ O und zwei senkrechte Achsen OX und OY, und fällt man von einem beliebigen Punkt P aus die Normalen PA und PB auf die beiden Achsen, so bezeichnen

$$x = \mathrm{sh}\ BP, \quad y = \mathrm{sh}\ AP, \quad p = \mathrm{ch}\ OP$$

die Weierstrass'schen Koordinaten des Punktes P in Bezug auf das gegebene Achsensystem (Hausdorff bezeichnete mit sh und ch die hyperbolischen Winkelfunktionen). Zwischen x, y, und p gilt die Beziehung $p^2 - x^2 - y^2 = 1$.[448] Anhand dieser Koordinaten ließen sich einige analytische Beziehungen der Geometrie der hyperbolischen Ebene und ihre Analogie zur ebenen und sphärischen Trigonometrie besonders gut erläutern. Hausdorff führte vor, wie durch einfache Transformationen der Weierstrass'schen Koordinaten Abbildungen in das Beltramische sowie in das konforme Bild der hyperbolischen Ebene vermittelt wurden. Darüber hinaus machte er sich die Tatsache zunutze, dass durch lineare Gleichungen der Form

$$ax + by - cp = 0$$

mit der Bedingung $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ für festes a, b, c die Gleichung einer Gerade der hyperbolischen Ebene gegeben ist; werden umgekehrt die Koordinaten x, y, p des Punktes P festgehalten, so beschreiben obige Ausdrücke alle durch den Punkt P verlaufenden Geraden.

Der zweite Abschnitt der „Analytischen Beiträge“ diskutiert die Bedeutung linearer Gleichungen der Form

$$kp - fx - gy = h$$

für konstantes h und zeigt, dass eine solche Gleichung abhängig von Größe und Vorzeichen des Ausdruckes $f^2 + g^2 - k^2$ Kreise, Grenzkreise oder Überkreise („Cykeln“, „Paracykeln“, „Hypercykeln“) der hyperbolischen Ebene darstellen. Im weiteren Verlauf des Aufsatzes diskutiert Hausdorff die geometrische Bedeutung von linearen homogenen Substitutionen der Weierstrass'schen Koordinaten sowie Kreisverwandtschaften der hyperbolischen Ebene, wobei er vielfach die aufgewiesenen analytischen Beziehungen zwischen dem Weierstrass'schen, dem Beltramischen und dem konformen Bild derselben nutzt.

[448] Diese Zusammenhänge werden in der modernen Literatur, jedoch nicht von Hausdorff, manchmal als „Weierstraßsches Modell der hyperbolischen Ebene“ bezeichnet, d.h. das durch $p^2 - x^2 - y^2 = 1$ und $p > 0$ bezeichnete einschalige Rotationshyperboloid im $\mathbb{R}^3$ erhält durch die Metrik $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dp^2$ die Geometrie der hyperbolischen Ebene. Wie unten gezeigt wird, führte Hausdorff selbst wenig später den Begriff des „Modells“ in seine Diskussion der nichteuklidischen Geometrien ein, jedoch in einem spezifischen, enger begrenzten Sinn. Daher ist es wichtig, seiner Terminologie möglichst genau zu folgen.

Bereits am Beginn des Aufsatzes deutete Hausdorff an, dass der entfaltete Gedankengang es gestatte, „etwa eine Vorlesung so einzurichten", dass anhand der Weierstrass'schen Koordinaten in die nichteuklidische Geometrie eingeführt wird, um dann „über die Mittelstufe der Beltrami'schen Abbildung" die „Cayley-Klein'sche Maassbestimmung, als krönenden Abschluss des Gedankenganges" vorzustellen.[449] Die oben genannte Vorlesung vom Wintersemester 1899/1900 folgte im Wesentlichen diesen Andeutungen.

Der geometrische Stil sowohl des Aufsatzes als auch der Vorlesung blieb dabei noch stark durch die Auffassung der Geometrie bestimmt, die Hausdorff in den Schriften Plückers, Kleins, Killings und anderer analytischer Geometer des 19. Jahrhunderts kennengelernt hatte. Neben Killing dürfte ein wichtiger Bezugspunkt die autographierte Vorlesung Felix Kleins über nichteuklidische Geometrie aus den Jahren 1890/1891 gewesen sein[450], ferner das in der Vorlesung genannte Nachschlagewerk *Vorlesungen über Geometrie* von Alfred Clebsch und Ferdinand Lindemann (Leipzig 1891), das u.a. auch Teile von Killings Überlegungen wiedergab. Mehrfach verwies Hausdorff auch auf fast gleichzeitig erschienene Schriften von Friedrich Engel zur nichteuklidischen Geometrie.[451]

Weder dem Aufsatz noch der genannten Vorlesung ist ein Hinweis darauf zu entnehmen, dass Hausdorff bei ihrer Ausarbeitung bereits Hilberts axiomatische Grundlegung der Geometrie kennengelernt hatte. Die Einleitung der Vorlesung erwähnt in dieser Hinsicht lediglich Moritz Paschs *Vorlesungen über neuere Geometrie* als Beispiel einer Schrift der „synthetischen Richtung". Die im vorigen Abschnitt diskutierte Rezeption der axiomatischen Grundlegung der Geometrie im Sinne Hilberts hat also vermutlich erst nach der Ausarbeitung der Vorlesung vom WS 1899/1900 begonnen.

4.2.2 Die Pluralität der nichteuklidischen Geometrien

Hausdorffs nächste Vorlesung zur nichteuklidischen Geometrie, zuerst gehalten im Wintersemester 1901/1902 und ein zweites Mal im Sommersemester 1904, stellte Hausdorff dann auf eine neue axiomatische Grundlage. Er begann die *Nichteuklidische Geometrie I* überschriebene Vorlesung mit knappen Ausführungen über die philosophische Bedeutung des Themas. Dazu unterschied Hausdorff zunächst zwischen der auf Euklid zurückgehenden Geometrie und allen anderen:

> [...] jede davon irgendwie abweichende soll <u>eine</u> <u>nichteuklidische</u> Geometrie genannt werden. <u>Die</u> <u>nichteukl.</u> G., als mathematische Disciplin, hat diese verschiedenen Geometrien einzeln und in vergleichender Zusammenfassung zu prüfen.[452]

[449][H 1899a], S. 161.
[450]Vgl. [H 1899a], S. 189, Anm. 1.
[451]Neben Hausdorff haben auch Friedrich Engel und etwas später Heinrich Liebmann in Leipzig Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie gehalten. Vgl. dazu die Bemerkungen in HGW, Band 1B, S. 492.
[452]NL Hausdorff, Fasz. 14, Blatt 4.

Das grundlegende Phänomen der Pluralität der Geometrien kommentierte Hausdorff im Anschluss wie folgt:

> Die Möglichkeit verschiedener Geometrien (während es nur Eine Logik, Eine Arithmetik giebt) beruht auf der Doppelstellung der Geometrie. Einerseits ist sie reine, von der Erfahrung unabhängige Wissenschaft, die ihren ganzen Lehrinhalt logisch von wenigen, ursprünglichen unbeweisbaren Sätzen (Axiomen) ableitet: zu jedem verschiedenen Axiomensystem gehört eine verschiedene Geometrie.
>
> [...] Andererseits aber zeigt Ein Axiomensystem, eben das der euklid. Geom., einen Vorrang durch seine Beziehung zur Anschauung: wir finden die Sätze dieser Geom. über Punkte, Geraden, Ebenen, starre Körper genähert wieder, wenn wir mit Perlen, Drähten, Scheiben, Glasstücken operiren.[453]

Diese Ungleichheit zwischen euklidischer Geometrie einerseits, nichteuklidischen Geometrien andererseits, so Hausdorff, greife einer philosophischen Deutung nicht vor:

> Bezeichnet R den euklid., R' einen nichteuklid. Raum (logisch verstanden, als Inbegriff aller aus dem gewählten Axiomensystem fliessenden Folgrungen), so wissen wir: R und R' sind beide denkbar, ausserdem ist R empirisch anwendbar. Das genügt uns, und der Mathematiker braucht nicht zu wissen, woher dieser Vorrang von R stammt. Hier aber setzt die Philosophie ein.[454]

Hausdorff informierte seine Hörer knapp über die hauptsächlichen philosphischen Richtungen in dieser Frage („aprioristische und nativistische Richtung", „empiristische Richtung") und fügte treffend hinzu: „Der Streit der Parteien hierüber ist noch immer nicht geschlichtet." Als hauptsächlichen Zweck der nichteuklidischen Geometrien gab er an, „den logischen Aufbau der euklidischen besser verstehen zu lernen", daneben verwies er aber auch auf weitere mathematische Anwendungen in „Funktionentheorie, Kinematik, Flächentheorie, Analysis der quadratischen Differentialausdrücke etc.", ferner auf die

> Herbeischaffung des Materials für die oben berührten philosoph. Fragen; der Math. kann sich zwar auf einen unabhängigen Standpunkt stellen, aber der Philosoph ist nicht unabh. vom Mathematiker (Beispiel: die angebliche Denknothwendigkeit der euklid. Geometrie).[455]

Hausdorffs Einleitung schloss mit historischen Hinweisen zu den Anfängen der nichteuklidischen Geometrie seit Gauss, Lobatschewski, Bolyai, Schweikart und Taurinus; als Quelle für diese Hinweise nannte er wie in späteren Schriften die von Paul Stäckel und Friedrich Engel im Jahr 1895 veröffentlichte Monographie *Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*.[456]

[453] *Nichteuklidische Geometrie I*, NL Hausdorff, Fasz. 14, Blatt 1.
[454] Ebd., Blatt 1-2.
[455] Ebd., Blatt 2.
[456] Vgl. [Stäckel/Engel 1895].

Im ersten mathematischen Abschnitt der Vorlesung unter dem Titel „§ 1. Das Parallelenaxiom“ wandte Hausdorff sich dann der modernen Darstellung der Axiome der Geometrie im Anschluss an Hilberts *Grundlagen* zu, um aus dieser Perspektive die axiomatischen Alternativen zwischen den verschiedenen nichteuklidischen Geometrien zu charakterisieren. Der darauf folgende Abschnitt „§ 2. Die pseudosphärische Geometrie“ stellte dann ausführlich jene Geometrie vor, die bei Weglassung des Parallelenaxioms (und gleichzeitigem Festhalten des Axioms der Unendlichkeit von Geraden) entsteht. Hausdorff zählte eingangs die verschiedenen Namen auf, welche dieser Geometrie von ihren frühen Vertretern (Gauss, Schweikart, Lobatschewski, Bolyai, Beltrami, Klein) gegeben wurden.[457] Nach einer Einführung der Begriffe „Parallele“ und „Parallelwinkel“ für diese Geometrie erläuterte Hausdorff dann das „Beltrami-Cayleysche Bild“ der pseudosphärischen Ebene, um im Anschluss die „Lobatschewskij'sche Trigonometrie“ zu diskutieren. Diese bereitete den nächsten Abschnitt „§ 3. Analytische Geometrie in der Lobatschewskij'schen Ebene“ vor, in dem Hausdorff das Material aufgriff, das er schon in seiner früheren Vorlesung und in den „Analytischen Beiträgen“ dargestellt hatte. Der nächste Abschnitt „§ 4. Das Beltrami-Cayley'sche Bild“ arbeitete dann die projektiven Aspekte der Beltramischen Abbildung heraus; er diente Hausdorff zur Vorbereitung des folgenden Paragraphen „§ 5. Die allgemeine projective Maßbestimmung“, in dem auch die „sphärische und elliptische Geometrie“ in die Diskussion eingeführt wurden. Im kurzen letzten Paragraphen „§ 6. Die Flächen konstanten Krümmungmaßes“ behandelte Hausdorff schließlich die „Aufgabe: solche Flächen des euklid. Raumes zu finden, welche die nichteukl. Geom. realisieren, wenn man ihre geodätischen Linien als ‚gerade Linien‘, die geodät. Entfernung zweier Punkte als geradlinige Entfernung bezeichnet.“[458] Da dies jedoch eigentlich ein Kapitel der Flächentheorie sei, genüge eine summarische Behandlung.

Die Paragraphen 2-5 umfassen den größten Teil der Vorlesung.[459] Sie wenden sich – nach der an Hilbert orientierten Einführung – wieder vor allem dem von Beltrami bis Klein und Killing behandelten Material der nichteuklidischen Geometrie zu, freilich in einer eigenständigen und sehr stringent gegliederten Weise. Bis auf das kurze Aufgreifen des bereits von Felix Klein beseitigten Verdachts eines „circulus vitiosus“ im projektiven Aufbau der nichteuklidischen Geometrien[460] spielen erkenntniskritische Überlegungen in dieser Vorlesung keine Rolle, und Hausdorff nutzte weiterhin konsequent die Sprache der „Abbildungen“ und „Bilder“, um über die Verhältnisse zwischen den verschiedenen Realisierungen der Axiome der nichteuklidischen Geometrien zu sprechen. Der Begriff des „Modells“ findet sich im Manuskript dieser Vorlesung noch nicht.[461]

[457] *Nichteuklidische Geometrie I*, NL Hausdorff, Fasz. 14, Blatt 13.
[458] Ebd., Blatt 80.
[459] Ebd., Blatt 13-79.
[460] Ebd., Blatt 75 f.
[461] Dies gilt auch für den kurzen Abschnitt, mit dem Hausdorff in seiner Wiederholung von *Nichteuklidische Geometrie I* im Sommersemester 1904 einen Teil des § 5 ersetzte; anstelle von Blatt 63-79 trug er nun die im Nachlass erhaltenen Blatt 85-94 vor.

Für das Sommersemester kündigte Hausdorff eine Vorlesung *Nichteuklidische Geometrie II* an, diese wurde jedoch laut einer von Hausdorff hinzugefügten Notiz doch nicht gehalten.[462] Das Manuskriptfragment dieser Fortsetzung begann wieder mit einigen epistemologischen Vorbemerkungen. In ihnen taucht ein Stichwort auf, das für Hausdorffs weitere Reflexion der Problematik des Raumes zentral werden sollte, und zwar das eines in mehreren Hinsichten gegliederten Spielraums für das Aufstellen geometrischer Systeme. Er wiederholte seine Bemerkungen zum Doppelcharakter der Geometrie vom Beginn von *Nichteuklische Geometrie I* („hypothetisch deduktives System“ vs. „empirische oder Naturwissenschaft, zur zweckmäßigen Beschreibung gewisser Thatsachen d. Wirklichkeit ersonnen“), um dann fortzusetzen:

> In der ersten Bedeutung giebt es ∞ viele logisch gleichberechtigte Systeme; in letzterer ist ein bestimmtes System, die euklidische G., ausgezeichnet, indessen so, dass auch ein gewisser Spielraum für Abweichungen bleibt. Approximativer Charakter der Erfahrung: ausserdem Einschränkung auf begrenztes Gebiet – Dreiecke von Billionen Sonnenweiten Seitenlänge haben wir noch nicht ausgemessen. Also Denkfreiheit und Erfahrungsspielraum für nichteuklidische Geometrien.[463]

Wie wir sehen werden, griff Hausdorff beide Motive – den Spielraum des Denkens und den der Erfahrung im Aufstellen einer mathematischen Beschreibung des Raums – in seiner ein Jahr später gehaltenen und gedruckten Antrittsvorlesung *Das Raumproblem* wieder auf. Das kurze erhaltene Fragment der Vorlesung wendet sich dann zunächst dem Unterschied von sphärischer und elliptischer Geometrie zu; es geht nicht aus ihm hervor, wie Hausdorff weiter fortsetzen wollte.

4.2.3 Nichteuklidische Geometrie für alle Naturforscher

Wie andere Vertreter einer modern orientierten Mathematik seiner Generation war auch Hausdorff bemüht, die Kenntnisse über die neuen mathematischen Geometrien über die engeren Fachkreise hinaus bekannt zu machen. In diesem Kontext steht das in diesem Band wiedergegebene Manuskript „Nichteuklidische Geometrie“, das Hausdorff wahrscheinlich 1901 oder 1902 ausarbeitete, etwa gleichzeitig mit den eben besprochenen Vorlesungen, wie zahlreiche inhaltliche Überschneidungen nahelegen, die z.T. bis in gleiche Formulierungen reichen.[464] Auch der grundsätzliche Aufbau des Textes ähnelt stark dem Material der Vorlesungen: Nach einigen philosophischen und historischen Anfangsüberlegungen werden die Grundbegriffe der pseudosphärischen, sphärischen und elliptischen Geometrie vorgestellt, um schließlich noch kurz auf die Flächen konstanter Krümmung einzugehen. Gegenüber den Vorlesungen sachlich neu

[462] NL Hausdorff, Fasz. 14, Blatt 95-105, von Hausdorff paginiert 1-11.
[463] Ebd., Blatt 95.
[464] Interessierte Leserinnen und Leser werden leicht einige der oben zitierten Passagen in Hausdorffs Essay wiedererkennen.

ist lediglich eine Einführung des auf Clifford zurückgehenden Begriffs der Parallelen im dreidimensionalen elliptischen Raum und der aus den gemeinsamen Senkrechten zweier paralleler Geraden gebildeten „Clifford'schen Fläche", womit Hausdorff ein weiteres Beispiel einer ebenen Geometrie gibt, die zwar lokal euklidisch, aber global von der euklidischen Ebene verschieden ist:

> Auf dieser Fläche gilt nämlich, wenn wir ihre kürzesten Linien als Gerade bezeichnen, die euklidische Geometrie; während aber die euklidische Ebene unendlich ist, ist die Fläche endlich und geschlossen, ihr Zusammenhang ist der einer Ringfläche des euklidischen Raumes.[465]

Der Essay gibt eine brillante Einführung in die behandelten nichteuklidischen Geometrien für ein breites Publikum, die von ihren Leserinnen und Lesern allerdings eine gewisse mathematische Grundbildung fordert. Intendiert war der Aufsatz, wie Hausdorff gleich im ersten Satz notierte, für eine „allgemeine Naturforscherzeitung".[466] Deutlicher als in seinen Vorlesungsmanuskripten betonte Hausdorff hier die grundlegende erkenntniskritische Bedeutung der nichteuklidischen Geometrie. Wie dort unterschied er zunächst die Pluralität der geometrischen Systeme von der Disziplin der nichteuklidischen Geometrie:

> Unter einer einzelnen nichteuklidischen Geometrie verstehen wir jedes System geometrischer Sätze, das in irgend einer mehr oder minder belangreichen Beziehung von einem bestimmten System, der euklidischen Geometrie abweicht; nichteuklidische Geometrie, als mathematische Disciplin, stellt sich die Prüfung und vergleichende Betrachtung aller dieser einzelnen Systeme zur Aufgabe. Jenes bestimmte einzige System aber, das sozusagen als Normalsystem zu Grunde gelegt wird und dem sich bereits in der Namensgebung alle übrigen als bloße Negationen, Abnormitäten, Spielarten gegenüberstellen, ist logisch betrachtet um kein Jota berechtigter, natürlicher, denknothwendiger als die andern; in dieser Hinsicht kann die Mathematik nicht scharf genug dem bei vielen Philosophen beliebten Vorurtheil widersprechen, das den euklidischen Raum mit all seinen speciellen Eigenthümlichkeiten als „Product logischer Setzung" a priori deduciren will.[467]

---

[465] NL Hausdorff, Fasz. 994, Blatt 79 f., in diesem Band.

[466] Das Manuskript enthält keinen Hinweis darauf, um welche Zeitschrift es sich handelte. Es könnte sich um die von Wilhelm Ostwald im Verlag Veit & Comp. in Leipzig herausgegebenen *Annalen der Naturphilosophie* gehandelt haben, in der wenig später Hausdorffs Leipziger Antrittsvorlesung gedruckt wurde. Der erste Band dieser Zeitschrift erschien 1902, und in seiner im Oktober 1901 verfassten „Einführung" betonte Ostwald sehr den alle Naturwissenschaften übergreifenden Charakter der neuen Zeitschrift. Hausdorffs Essay hätte nach Stil und Inhalt sehr gut in die erste Nummer gepasst, und mit demselben Verlag stand er später in Verhandlungen über ein Buch zum Thema *Zeit und Raum*, vgl. Abschnitt 4.4. Die Korrespondenz mit Ostwald legt auch nahe, dass dieser gerne weitere Aufsätze von Hausdorff in seiner Zeitschrift gedruckt hätte, vgl. HGW, Band IX, S. 533-538. Eine mögliche Alternative wäre die ab 1904 von der *Kosmos-Gesellschaft der Naturfreunde* herausgegebene populäre Zeitschrift *Kosmos*, was allerdings mit der hier vorgeschlagenen Datierung weniger wahrscheinlich erscheint.

[467] NL Hausdorff, Fasz. 994, Blatt 4 f.

Und ebenso wie in der Einführung seiner Vorlesung *Nichteuklidische Geometrie II* unterstrich Hausdorff, dass „bei Licht besehen, nur ein Vorrang [besteht], den die übrigen gleich denkbaren Systeme der euklidischen Geometrie einräumen müssen, der Vorrang empirischer Gültigkeit.“ Freilich musste man „jene der euklidischen Geometrie zugestandene Suprematie gleich von Anfang an wieder ein wenig herabdrücken“, denn:

> Die begrenzte Genauigkeit auch der allerfeinsten Messungen gestattet nicht, kategorisch zu behaupten, der von uns bewohnte Raum sei einzig und allein der euklidische: sie lässt einen unvermeidlichen Spielraum, eine mögliche Abweichung unterhalb der Grenze der Beobachtungsfehler und hindert uns keineswegs, an Stelle des euklidischen Systems ein davon unmerklich verschiedenes nichteuklidisches zu setzen. Ferner: die Erfahrung beschränkt uns immer auf ein begrenztes Gebiet des Raumes, den wir über diese Grenzen hinaus durch ideale Extrapolation erweitern. So seltsam reactionär das klingen mag: selbst Sätze wie diejenigen, welche von der Unendlichkeit und Unbegrenztheit der Welt in Raum und Zeit reden, sind doch streng genommen sehr voreilige Schlüsse aus der Mitte des Universums auf seine Ränder und haben etwa den Werth, den die Meinungen einer Qualle im Atlantischen Ozean über die Gestalt der amerikanischen Küste beanspruchen könnten.[468]

Angesichts dieses „Erfahrungsspielraums“ stellte Hausdorff auch hier die Frage nach dem Verhältnis der *mathematischen* und der *philosophischen* Zugangsweise zum Thema der Geometrie. Ausführlicher als in seiner Vorlesung betonte Hausdorff die Unabhängigkeit der lediglich auf die „Denkbarkeit der verschiedenen Geometrien“ angewiesenen Mathematik gegenüber der Philosophie. Ebenso werde die Mathematik „auf ihrem Hausrechte bestehen, die Objecte ihrer Forschung auch nach eigenem wohlerwogenen Ermessen zu betiteln, und [...] die Verantwortung für alle daraus entspringenden Missverständnisse höflich, aber bestimmt ablehnen.“[469] Dieser Satz leitete eine entschiedene Verteidigung sprachlicher Freiheiten in der Mathematik ein:

> Gerade die moderne Mathematik verdankt wesentliche und aufklärende Einsichten dem Radicalismus, mit dem sie verfahren ist, und der für den uneingeweihten Betrachter allerdings etwas Willkürliches, die liebsten Gewohnheiten verletzendes hat. Da wird mit „Zahlen“ gerechnet, bei denen $2a = a$ sein kann, eine „Multiplikation“ so definirt, dass ab und ba verschieden sind oder dass ein Product nichtverschwindender Factoren Null sein kann; die kürzesten Linien auf einer Fläche werden nach Bedürfniss als „Gerade“ bezeichnet, eine Gerade des gewöhnlichen Raums als ein „Punkt“ eines vierdimensionalen Raums gedeutet u.s.w. Ja warum thut das die Mathematik? [...] Weil eine folgerichtige, von innerer Zweckmässigkeit geleitete Namengebung nichts Nebensächliches und Entbehrliches, sondern von fundamentaler Bedeutung ist oder sein kann; weil ein sachgemässer Name die wichtigsten Zusammenhänge

[468]NL Hausdorff, Fasz. 994, Blatt 6.
[469]Ebd., Blatt 6. f.

> zwischen scheinbar entfernten Gebieten aufdecken, ein unsachgemässer sie verschleiern kann. Die Übertragung eines Sprachgebrauchs auf ungewöhnliche, abweichende Fälle dient insbesondere dazu, die zahlreichen Voraussetzungen einzeln sichtbar zu machen, die in der gewöhnlichen Begriffssphäre ungelöst schwimmen; sie ist geradezu das „logische Experiment", das Trennungsmittel der ungeschiedenen Bestandtheile, die chemische Analyse der Begriffe.[470]

Ein weiterer Punkt, in dem die Mathematik gegenüber der Philosophie Unabhängigkeit beanspruchen konnte, betraf ihre Auffassung von der Anschaulichkeit mathematischer Gegenstände. Während die Philosophie bisweilen glaubte, definitive Grenzen der Anschauung festlegen zu können, suchte die Mathematik „ihre reinen Gedankengebilde auch anschaulich vorzustellen" und verfuhr dabei wiederum „mit freier Benutzung der Wirklichkeitselemente". Freilich sei „über ihre Berechtigung zu solcher Thätigkeit schwer etwas Abschliessendes, Definitives zu sagen, weil das Wort ‚anschaulich' zu vielerlei und eigentlich bei Jedem etwas Anderes bedeutet."

> Aber die Grenzen des anschaulich Vorstellbaren sind für jeden Intellect anders gezogen, je nach dem Umfang der individuellen Erfahrung und nach der Stärke der metaphorischen, analogiebildenden Phantasie.[471]

Hausdorffs Essay mobilisierte vor allem den letzten Aspekt – die metaphorische Kraft der Phantasie – gegen die „Aprioristen der Geometrie". Der „phantasiebegabte Mathematiker" lasse sich nicht davon abhalten,

> den Gebilden seines Denkens die Lebendigkeit der Anschauung einzuhauchen und ein vom Euklidischen abweichendes System geometrischer Sätze als nichteuklidischen Raum zu hypostasiren, unbekümmert darum, ob Geister von schwächerer Phantasieentwicklung ihm in dieses Reich concreter Schöpfung und Belebung folgen oder beim Zugeständniss der abstracten Denkmöglichkeit solcher Gebilde stehen bleiben..[472]

Hausdorff lobte insbesondere Helmholtz dafür, anschauliche Analogien für nichteuklidische Raumverhältnisse geliefert zu haben. Umgekehrt deutete er auch eine gewisse Skepsis gegen Mathematiker an, die ihre Behandlung und Bewertung der nichteuklidischen Geometrien allein auf deren abstrakte Denkmöglichkeit einschränkten und „alle Fragen nach dem psychologischen Ursprung, der erkenntnisstheoretischen Bedeutung unserer Raumvorstellung behutsam vermieden".[473]

Vor diesem Hintergrund diskutierte Hausdorffs Essay am Ende des zweiten Abschnitts dann auch das „Beltrami-Cayley'sche Bild der pseudosphärischen

[470] NL Hausdorff, Fasz. 994, Blatt 10.
[471] Ebd., Blatt 13.
[472] Ebd., Blatt 16.
[473] Ebd., Blatt 17.

Geometrie".[474] Auch dieses Bild lieferte „eine anschauliche Analogie", welche zunächst nur „als hülfreiches Symbol, [...] später als das wahre Äquivalent der Sache", d.h. des gesamten Systems der pseudosphärischen Geometrie dienen konnte.[475] Derartigen „Bildern" kam freilich noch eine weitere, erkenntnistheoretisch grundlegende Bedeutung zu. Am Beginn des dritten Abschnitts seines Essays, der die sphärische und die elliptische Geometrie behandelte, fügte Hausdorff eine weit ausgreifende Überlegung zur Widerspruchslosigkeit axiomatischer Systeme ein, die für seine späteren Texte einen wichtigen Ausgangspunkt bildete.

> Was bedeutet die Aussage, ein System sei in sich widersprechend oder in sich widerspruchsfrei?[476]

Nur „in den seltensten Fällen" sei eine „alle Skepsis entwaffnende Bejahung" der Frage der Widerspruchslosigkeit eines „gedachten Systems" wohl zu erwarten. Zu ihnen, so Hausdorff, gehörten Logik und „reine Arithmetik". Hingegen

> für irgend ein anderes System, z.B. die euklidische Geometrie, werden wir die Frage bereits nur indirect lösen können, indem wir es logisch oder arithmetisch abbilden – denn die „Anschauung" beweist natürlich gar nichts, da sie ungenau und auf kleine Theile des zu untersuchenden Gesamtbereichs eingeschränkt ist.

Damit erklärte Hausdorff das *Abbilden* zur allgemeinen Strategie eines schrittweisen Nachweises der Widerspruchsfreiheit eines axiomatischen Systems. Auch das „Beltrami-Cayley'sche Bild", oder allgemein ein „euklidisches Bild", wie Hausdorff nun formulierte, erhielt so eine neue Funktion als Instrument des Nachweises der Konsistenz:

> Von der Widerspruchlosigkeit der euklidischen Geometrie wird man nun wieder auf die einer nichteuklidischen schliessen können, wenn man, allgemein und etwas ungenau ausgedrückt, ein *euklidisches Bild* derselben herstellen kann, d.h. wenn man den nichteuklidischen Elementen (Punkten, Linien, Flächen u.s.w.) Elemente der euklidischen Geometrie so zuordnen kann, dass die nichteuklidischen Beziehungen zwischen jenen durch die euklidischen zwischen diesen dargestellt werden.[477]

Auch dieser Essay verwendet den Begriff des „Modells" nicht. Lediglich in einem längeren Zitat aus Helmholtz über die Schwierigkeit der konkreten Anschauung selbst gewöhnlicher euklidischer Raumverhältnisse fand das Motiv eines „vielflächigen Krystallmodells" Eingang in den Hausdorffschen Text.[478] Dies

[474] Von diesem Abschnitt liegt im Nachlass eine „II. Das Parallelenaxiom" überschriebene Abschrift von fremder Hand (Charlotte Hausdorff?) vor, die von der hier abgedruckten Fassung im Essay nur an sehr wenigen Stellen geringfügig abweicht, vgl. NL Hausdorff, Fasz. 88.
[475] NL Hausdorff, Fasz. 994, Blatt 34.
[476] Ebd., Blatt 57.
[477] Ebd., Blatt 62; Hervorhebung im Original.
[478] Vgl. Abschnitt 2.3.6.

änderte sich in den nachfolgenden Texten Hausdorffs zum Raumproblem, die viele Motive des Essays aufgriffen und weiterführten.

4.3 *Das Raumproblem* und die Vorlesung *Zeit und Raum*

Hausdorffs Überlegungen zur Erkenntnistheorie und mathematischen Grundlegung von Zeit und Raum erhielten ihre reflektierteste Fassung in den Jahren 1903 und 1904, als Hausdorff sein Extraordinariat in Leipzig antrat. Zunächst machte er *Das Raumproblem* zum Thema seiner Leipziger Antrittsvorlesung am 4. Juli 1903. Im darauf folgenden Wintersemester hielt er eine bemerkenswerte Vorlesung über *Zeit und Raum.* Auch diese beiden Texte sind im vorliegenden Band enthalten. Sie dokumentieren noch deutlicher als die vorangegangenen Vorlesungen zur nichteuklidischen Geometrie, wie die Rezeption der axiomatischen Methode Hilberts nun auch sein erkenntniskritisches Denken veränderte, und wie aus einer „nihilistischen", eher metaphorisch und poetisch als logisch operierenden Kritik der auch in der Naturwissenschaft „verlarvten Metaphysik" eine mit logischen und axiomatischen Mitteln arbeitende Kritik naturwissenschaftlicher Grundbegriffe werden konnte. Damit verbunden war eine prägnante und entschiedene neue Charakterisierung der Rolle der Mathematik für die naturwissenschaftliche Erkenntnis.

4.3.1 Mathematischer, empirischer und absoluter Raum

In seiner Antrittsvorlesung – die hier nur in einem knappen Vergleich mit den im vorigen Abschnitt beschriebenen Materialien behandelt sei[479] – entfaltete Hausdorff das ihm vorliegende Problem zunächst durch die Unterscheidung dreier Ebenen des Raumbegriffs: des „mathematischen Raums", einer „freien Schöpfung unseres Denkens, keinem anderen Zwange als dem der Logik unterworfen", des „empirischen Raums", den Hausdorff als „ein System wirklicher Erlebnisse und Erfahrungen, das in unserem Bewußtsein tatsächlich vorübergleitende Phänomen der raumerfüllenden Außenwelt" fasste, und des „objektiv-naturwissenschaftlichen" oder „absoluten Raums", der „ein gewisses Verhalten der Dinge unabhängig von unserem Bewußtsein" beschreibt, „um unsere Raumanschauung zu erklären".[480] Die zentrale Frage, die Hausdorff in seiner Antrittsvorlesung beantworten wollte, griff auch sein Leitmotiv der Variation möglicher Raum- und Zeitvorstellungen aus der ersten Phase seiner erkenntniskritischen Überlegungen wieder auf, wobei er es nun in einen anderen Rahmen stellte, in welchem die Rolle des Bewusstseins ebenso wie die einer „absoluten" Struktur von Raum und Zeit eine neue Stellung erhielt:

> Ist der mathematische, der empirische, der absolute Raum nur auf eine einzige, alle Abweichungen ausschließende Art definiert, oder haben wir

[479] Für einen ausführlichen Kommentar aus anderer Perspektive sei auf den entsprechenden, von Egbert Brieskorn verfassten Abschnitt in HGW, Band IB, S. 508-534 verwiesen.
[480] *Das Raumproblem*, S. 1-2.

> vielleicht die Wahl zwischen verschiedenen gleichberechtigten Hypothesen?[481]

Darin lagen drei Teilfragen, die Hausdorff sehr unterschiedlich beantwortete. Für den empirischen Raum, so argumentierte er, bestand keinerlei Spielraum, da wir „die Erfahrungen und Bewußtseinserscheinungen, die ihn konstituieren, als fait accompli über uns ergehen lassen müssen in reiner Receptivität, mögen wir naiv beobachten oder willkürlich experimentieren."[482] Ganz anders jedoch war die Lage für den mathematischen und den absoluten Raum:

> Hier ist in der Tat – und das möchte ich heute in seiner ganzen Paradoxie zur Erwägung stellen – die vermutete Wahlfreiheit vorhanden, und mit dem allergewaltigsten Spielraum: nämlich Wahlfreiheit zwischen unendlich vielen Hypothesen, von denen keine mehr oder weniger berechtigt ist als die andere.[483]

Hausdorff entfaltete diese Antwort im Anschluss auf virtuose Weise. Für den *mathematischen Raum* stützte er sich dabei auf die Entwicklungen im Anschluss an die Aufstellung der nichteuklidischen Geometrien, die er nun durchgehend auch erkenntniskritisch kommentierte. Auf der Höhe der Zeit stehend, bediente er sich wie in den vorangehenden Vorlesungen der axiomatischen Methode, der er mit einem besonderen Blick für die (lokale und globale) topologische Vielfalt der Raumformen eine eigene Stoßrichtung gab. Für den *absoluten Raum* hingegen griff er die Überlegungen seiner Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* auf und legte dabei – zum ersten Mal auch im Druck – seine frühere Autorschaft unter dem Pseudonym Paul Mongré offen.

Zur Erläuterung seiner These, dass es für den *mathematischen Raum* einen unendlichen Spielraum möglicher Raumformen gibt, untergliederte er den bestehenden Spielraum noch einmal in drei unterschiedliche Formen: Hier ist

> die Mehrheit der Hypothesen und die Freiheit der Wahl zwischen ihnen in dreifacher Weise verbürgt: durch den Spielraum des Denkens, den Spielraum der Anschauung, den Spielraum der Erfahrung.[484]

Der erste dieser drei Spielräume war das Betätigungsfeld für die axiomatische Methode. Sie eröffnete, wie er es bereits in den oben besprochenen Arbeiten ausgeführt hatte, die Möglichkeit zur Aufstellung einer Pluralität verschiedener geometrischer Systeme, die allein durch das Kriterium der Widerspruchsfreiheit begrenzt war. Der Sache nach schloss er an die entsprechenden Ausführungen seines früheren Essays an, jedoch mit einer scheinbar geringfügigen, aber wichtigen terminologischen Verschiebung:

> Die Abwesenheit eines Widerspruchs ist durch geeignete Abbildungen der nichteuklidischen Geometrien auf euklidische Modelle und der euklidischen Geometrie auf die reine Arithmetik direkt bewiesen worden.[485]

[481] *Das Raumproblem*, S. 2.
[482] Ebd.
[483] Ebd.
[484] Ebd., S. 3.
[485] Ebd.

Was Hausdorff zuvor „euklidisches Bild“ genannt hatte, war nun zum „euklidischen Modell“ geworden – und zwar just im Zusammenhang des Nachweises der Widerspruchsfreiheit eines axiomatischen (geometrischen) Systems. Es handelt sich hier um eine der frühesten Fundstellen eines *abstrakten* Modellbegriffs. In der mathematischen Sprache des 19. Jahrhunderts hatte das Wort „Modell“ dagegen *materielle* Objekte bezeichnet – auch im Kontext der nichteuklidischen Geometrie.[486] In der Verbindung „euklidisches Modell“ – und nur in dieser – verwendete Hausdorff den Ausdruck „Modell“ noch in einer weiteren Passage:

> [...] man kann sagen: die sphärische Geometrie blieb unentdeckt, weil ihr euklidisches Modell, die Kugel, schon vorhanden war. Dass ein solches Modell auch für die pseudosphärische Ebene später gefunden wurde, in Gestalt der Flächen konstanter negativer Krümmung, erleichterte nicht ihre Erforschung [...].[487]

Möglicherweise war es gerade der Kontext der Antrittsvorlesung, der Hausdorff an die – seiner Zuhörerschaft in materieller Form vertrauten – „Modelle“ denken ließ, wenn es darum ging, die Plausibilität der nichteuklidischen geometrischen Systeme einem breiteren akademischen Publikum nahe zu bringen. So griff er auch bei der Erläuterung der *topologisch* vom euklidischen Raum abweichenden Raumformen auf materielle Analogien zurück, wie etwa ein um einen „Glaszylinder“ gewickeltes „Papierblatt“.[488] Wie wir in Abschnitt 4.3.3 sehen werden, entfaltete Hausdorff das hier nur kurz angedeutete Motiv in seiner Vorlesung *Zeit und Raum* weiter.

War der „Spielraum des Denkens“ für den mathematischen Raum nur durch die Widerspruchslosigkeit begrenzt, so der „Spielraum der Erfahrung“ durch die „Beobachtungsschwelle“ der wissenschaftlichen Empirie. Wo immer in der Messung geometrischer Sachverhalte „stetig veränderliche“ Größen betroffen waren, so griff Hausdorff wiederum seine früheren Ausführungen auf, erlaubte die begrenzte Messgenauigkeit eine Variation der zugrundeliegenden geometrischen Hypothesen. Allenfalls bei diskreten Parametern – wie der Dimensionenzahl des Raumes – mochte der Erfahrungsspielraum auf einen einzelnen Wert eingeschränkt sein:

> Daß die Dimensionenzahl Drei keine Denknotwendigkeit ist, wird heute wohl gutwillig zugestanden werden; der Mathematiker wird seinerseits, mit Ablehnung aller spiritualistischen Zauberkunststücke, zugeben, daß hier kein Erfahrungsspielraum für Abweichungen von der Drei offen bleibt.[489]

Im Nachlass findet sich ein Blatt mit wahrscheinlich in ironisch-kritischer Absicht verfassten Notizen, in denen Hausdorff einige offensichtlich absurde „Raumdeductionen („Beweise“, dass der Raum drei Dimensionen haben muss)“

[486] Vgl. hierzu [Epple 2016].
[487] *Das Raumproblem*, S. 8 f.
[488] Ebd., S. 11.
[489] Ebd., S. 13.

zusammenstellte.[490] Die „spiritualistischen Zauberkunststücke“ des Leipziger Astrophysikers und Spiritisten Karl Friedrich Zöllner wiederum hatte Hausdorff bereits in *Das Chaos in kosmischer Auslese* erwähnt.[491]

Was den „Spielraum der Anschauung“ für den mathematischen Raum betraf, wiederholte Hausdorff mit prägnanten und zum Teil wortgleichen Formulierungen seine frühere Kritik an der kantianischen Idee, dass es ein festes, erkenntnisbegründendes Vermögen der Anschauung gäbe und verwies letztere in das Feld der individuellen Psychologie:

> Die Frage nach der Vorstellbarkeit der nichteuklidischen Geometrie hat unter solchen Umständen keine allgemeine Bedeutung mehr und sinkt zu einer psychologischen Personenfrage herab, die nunmehr aber, unter geeigneten persönlichen Vorbedingungen, entschieden zu bejahen ist. Der phantasiestarke Mathematiker wird den Gebilden seines Denkens auch die Lebendigkeit der Anschauung einzuhauchen wissen, während Geister von schwächerer Flugkraft oder mehr abstrakter Richtung ihm in sein Reich konkreter Schöpfung und Belebung nicht zu folgen vermögen.[492]

Vor diesem Hintergrund führte Hausdorff seinen Hörern nun die in diesem dreifachen Spielraum möglichen Variationen der euklidischen Raumform vor, charakterisiert als „Raum verschwindender Krümmung, als Raum freier Beweglichkeit, als Raum einfachen Zusammenhanges, als dreidimensionalen stetigen Raum“.[493] Zum ersten Punkt gab Hausdorff eine kompakte Zusammenfassung des auch in seinem Essay „Nichteuklidische Geometrie“ behandelten Materials, für den zweiten ergänzte er die entsprechenden früheren Bemerkungen um Hinweise auf die zeitgenössischen Debatten der Physik, so insbesondere durch einen Hinweis auf die Revision der Idee des starren Körpers, welche durch die Hypothese der Lorentz-Kontraktion erfolgt war.[494] In weitsichtiger Zurückhaltung warnte er seine Zuhörerschaft davor, auch sicher geglaubte Eigenschaften des Raumes wie „Homogenität und Isotropie“ für unrevidierbar zu halten. Gerade physikalische Gründe könnten, so Hausdorff mit Bezug auf die Spekulationen Riemanns und Cliffords, dafür sprechen, die freie Beweglichkeit starrer Körper als Axiom der Geometrie fallen zu lassen und allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten oder gar Mannigfaltigkeiten ohne Riemannsche Metrik ins Auge zu fassen. Für den die auf topologische Variationen der Raumform bezüglichen Abschnitte der Antrittsvorlesung verwies Hausdorff neben der Arbeit Felix Kleins aus dem Jahr 1890, in der die später von Wilhelm Killing als Problem der

[490] NL Hausdorff, Fasz. 1078, Blatt 3; eine ähnliche Passage findet sich auch in der Vorlesung *Zeit und Raum*, Blatt 51 f. Vgl. hierzu auch HGW, Band IB, S. 501 f.

[491] Vgl. *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 117 und den Zeilenkommentar dazu in HGW, Band VII, S. 868.

[492] *Das Raumproblem*, S. 6.

[493] Ebd., S. 7. Die entsprechenden Passagen hat Brieskorn ausführlich aus mathematischer Sicht kommentiert, vgl. HGW, Band IB, S. 521-528.

[494] In einer Fußnote verwies Hausdorff auf das 1900 erschienene *Lehrbuch der Optik* des Leipziger Physikers Paul Drude [Drude 1900], in welchem die Lorentzsche Hypothese beschrieben war.

„Clifford-Kleinschen Raumformen“ bezeichnete Frage aufgeworfen wurde, sowie auf den ersten Band von Killings 1893 gedrucktem Lehrbuch *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*.[495] Schließlich griff er auch hier – unter Verweis auf die Arbeiten Cantors – die Fragen auf, die ihn schon im Raumkapitel von *Das Chaos in kosmischer Auslese* beschäftigt hatten und weiter beschäftigen würden: die Frage nach der Stetigkeit des Raumes, und, in Verbindung damit, die Frage der Raumdimension. Wie eben schon zitiert, herrschte hier nach Hausdorff vorläufig eine Art erkenntnistheoretischer Waffenstillstand: die Zahl der Raumdimensionen war zwar „keine Denknotwendigkeit“, aber der Mathematiker musste „zugeben, dass hier kein Erfahrungsspielraum für Abweichungen von der Drei offen bleibt“.[496] Freilich verwies er auf die von Cantor, Dedekind, Hilbert und Peano aufgewiesenen Schwierigkeiten des Zusammenhangs von Dimensionsbegriff und Stetigkeit, die er inzwischen gut kannte.[497] Im Licht dieser Bemerkung gewinnt Hausdorffs spätere Einführung eines Dimensionsbegriffs mit nicht ganzzahligen Werten für bestimmte Räume eine besondere erkenntnistheoretische Bedeutung, da damit die erkenntnistheoretische Anomalie des Dimensionsbegriffs beseitigt und möglicherweise sogar für die Zahl der Raumdimensionen wieder ein „Spielraum der Erfahrung“ eröffnet werden konnte.[498]

Nach diesem Durchgang durch die möglichen Variationen des mathematischen Raumbegriffs wandte sich Hausdorff wie angekündigt dem Problem des „absoluten Raums“ zu, der sowohl in philosophischer wie in „objectiv-naturwissenschaftlicher“ Sicht nach wie vor häufig verteidigt wurde. Wie in seinen früheren Arbeiten hielt Hausdorff dabei unverändert an der Überzeugung fest, dass zwar die hierfür wesentliche Einsicht der gänzlichen Unerkennbarkeit eines Raumes der Dinge „unabhängig von unserem Bewußtsein“ schon in Kants These von der transzendentalen Idealität des Raumes zu finden war, dass es aber einer neuen Beweismethode für diese These bedurfte. An dieser Stelle ließ Hausdorff nun sein früheres Alter Ego Paul Mongré die Bühne betreten. In der gedruckten Fassung der Antrittsvorlesung notierte er: „Lassen Sie mich daher eine eigene Beweismethode skizzieren und diese zunächst durch ein Gleichnis erläutern.“ Diese Beweismethode folgte – in knapperer und modifizierter Form – dem zentralen Argument der Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese*. Die zugehörige Anmerkung in der gedruckten Fassung seiner Antrittsvorlesung lautet:

> Vgl. P. Mongré, „Das Chaos in kosmischer Auslese“, Leipzig 1899. Keime und Ansätze des im Text besprochenen Transformationsprinzips – dem für das Zeitproblem etwas ganz Analoges entspricht – habe ich außer bei Helmholtz [...] nur bei B. Erdmann finden können [...].

Er verwies zudem darauf, dass das Transformationsprinzip „natürlich bei jeder scharfen Darstellung der Axiome zur Geltung kommen“ musste, so u.a.

[495]Vgl. [Klein 1890] und [Killing 1893].
[496]S.o.; *Das Raumproblem*, S. 13.
[497]Vgl. oben, Abschnitte 2.3.2 und 3.6.1.
[498]Vgl. dazu Abschnitt 5.3.3.

in Sophus Lies gruppentheoretischem Zugang zur Geometrie und in Hilberts axiomatischer Definition der Geometrie, die zur Folge hatte, dass „der ganze Aussagenkomplex der Geometrie nicht nur von einem einzigen Elementensystem, sondern auch von dessen eindeutigen Bildern gilt.“[499] Die Antrittsvorlesung stellte dann anhand des Gleichnisses „einer brauchbaren geographischen Karte“ die Idee einer *Abbildung* vom absoluten in den empirischen Raum vor:

> Nun, unser empirischer Raum ist solch eine körperliche Karte, ein Abbild des absoluten Raumes; aber es fehlt uns der Eckenvermerk, wir kennen das Projektionsverfahren nicht und kennen folglich auch das Urbild nicht. [...] Wenn diese Auffassung richtig ist, so muß man das Urbild einer beliebigen Transformation unterwerfen können, ohne dass das Abbild sich verändert: gerade so wie man einer Karte nicht ansehen kann, ob sie nach dem Original oder nach einer anderen Karte gezeichnet ist.[500]

Es folgte,

> daß der empirische Raum keine getreue Kopie des absoluten, sondern nur sein Abbild nach einem beliebigen, unbestimmbaren Projektionsverfahren ist.[501]

Freilich sollte diese Einsicht nicht „in einen uferlosen Illusionismus“ metaphysischer Art münden, und auch wenn wir

> den absoluten Raum als bestimmbaren Begriff streichen müssen, so soll damit die Gesetzmäßigkeit im empirischen Raum nicht preisgegeben sein.[502]

Für die erkenntnistheoretische Position, die damit in Bezug auf das Raumproblem erreicht war, schlug Hausdorff nun den Namen eines „besonnenen Empirismus“ vor – besonnen deshalb, weil die empiristische Orientierung der Analyse des Raumbegriffs ergänzt wurde durch die Einsicht in die Vielfalt der denkmöglichen und mit der Erfahrung verträglichen mathematischen Beschreibungen des Raumes:

> So münden zum Schlusse die beiden von uns beschrittenen Wege in einen *besonnenen Empirismus*; von der Unbestimmtheit des mathematischen wie des absoluten Raumes werden wir auf das einzig Gegebene, den empirischen Raum, zurückverwiesen. Ich will nicht behaupten, daß die wissenschaftliche Ausgestaltung dieses besonnenen Empirismus ganz leicht sein wird; jedenfalls bleiben die bisherigen Formen des Empirismus unter seinem Niveau.[503]

[499] Alle Zitate in *Das Raumproblem*, Anm. 28. Ob Hausdorff eine entsprechende Bemerkung auch in seinem mündlichen Vortrag machte, ist mir nicht bekannt. Dass unter den anderen Quellen Poincaré nicht genannt wird, ist möglicherweise ein Hinweis darauf, dass die früher besprochene Notiz im Nachlass, Fasz. 1079, Blatt 3, in der Poincarés Name fällt, erst nach dem Druck der Antrittsvorlesung entstanden ist, vgl. Abschnitt 3.6.1.
[500] *Das Raumproblem*, S. 15.
[501] Ebd., S. 17.
[502] Ebd.
[503] Ebd., S. 18.

Damit war am Beispiel des Raumbegriffs ein wissenschaftstheoretisches Programm bezeichnet, das im Grunde sehr viel weiter ging. In ähnlicher Weise konnte nicht nur der Zeitbegriff analysiert werden, sondern genaugenommen auch jeder andere wissenschaftliche Begriff, der empirischen Inhalt hatte und für den ein Spielraum verschiedener mathematischer Formulierungen bestand. Die präzise axiomatische Analyse solcher Formulierungen und ihrer jeweiligen Varianten war in diesem Licht nicht nur eine innermathematische Aufgabe und ein „logisches Experiment", sondern ein Beitrag ihrer „empirischen Kritik". Hierin lag auch eine neue eine Ausbuchstabierung des Aphorismus, in dem Mongré die „Selbstkritik der Wissenschaft" als eine der Aufgaben der Mathematik bezeichnet hatte, und eine neue Fassung des „neuen Standpunkts zur Naturwissenschaft", den er in *Das Chaos in kosmischer Auslese* angekündigt hatte.[504]

4.3.2 Axiomatische Analyse der Zeit

In der im Wintersemester 1903/1904 gehaltenen Vorlesung *Zeit und Raum* führte Hausdorff nicht nur die knappen Bemerkungen seiner Antrittsvorlesung zum Raumproblem weiter aus, sondern er ergänzte sie durch eine parallele Diskussion seiner inzwischen erreichten Position des besonnenen Empirismus hinsichtlich der Zeit. Die in diesem Band edierte Vorlesung braucht hier nicht ausführlich besprochen zu werden. Es seien jedoch einige Aspekte herausgehoben, die im Vergleich zum früher Dargestellten wichtig erscheinen.

Zu den Eingangsüberlegungen der Vorlesung gehört wie in der Antrittsvorlesung die Bennenung der verschiedenen Wissenschaften, die mit dem Problem der Zeit befasst sind. Während die Psychologie die „räumlichen und zeitlichen Tatsachen in unserem Bewusstsein" behandle, bilde die Frage „In welchen einfachen Rahmen fügen [diese Tatsachen] sich?" die Leitfrage der mathematischen (und logischen) Analyse der Zeit. Die Physiologie und die Physik wiederum befassten sich gleichermaßen mit der „transsubjectiven Wirklichkeit" von Zeit und Raum; auch die Metaphysik versuche dies auf ihre Weise. Dementsprechend ließ sich eine Diskussion der Begriffe Zeit und Raum nach Hausdorff in drei Stufen gliedern: in das „formale Problem", das „objective Problem" und das „subjective Problem".[505]

Hausdorff behandelte zuerst – und am ausführlichsten – das formale Problem von Zeit und Raum auf 49 Manuskriptseiten. Der zweite Teil – das objektive Problem – umfasste noch 16 Seiten des Manuskriptes; ein angekündigter dritter Teil über das subjektive Problem fehlt leider ganz. Hausdorff leitete seine Diskussion des formalen Problems mit einem eigenen Kapitel ein, das die Überschrift „Der Formalismus" trug; daneben enthält der Nachlass noch ein weiteres, ausführlicheres Fragment mit demselben Titel.[506] Die Manuskriptseiten, die diesen Teil der Vorlesung skizzieren, enthalten nicht nur eine Überlegung, warum es sinnvoll ist, eine Analyse des Zeit- und Raumbegriffs auf eine

[504] Vgl. Abschnitte 3.1.2 und 3.5.
[505] *Zeit und Raum*, Blatt 1-2.
[506] Vgl. dazu Abschnitt 4.4.1.

Übersicht der Möglichkeiten ihrer mathematischen Beschreibung zu gründen, sondern auch eine Reflexion des Charakters von Mathematik schlechthin.

Mit dem Verweis auf eine vielzitierte Bemerkung Newtons legte Hausdorff dar, dass selbst die einfachsten Vorstellungen über Zeit und Raum (wie Punkt, Augenblick, vor und nach, Linie) „in Wirklichkeit sehr complicirte Begriffe" sind, „die jeder Definition spotten". Auf der anderen Seite wies Hausdorff den verbreiteten philosophischen Ausweg zurück, zu ihrer Erklärung auf eine unmittelbare oder angeborene Anschauung zu verweisen, wie es nicht nur im Kantianismus, sondern auch in anderen philosophischen Systemen des 19. Jahrhunderts gängig gewesen war (z.B. in Schopenhauers und Lotzes Metaphysik). Auf diese Weise bezöge die Mathematik „ihre Bedeutung und Gültigkeit aus der Anschauung" und hinge „also von philosophischen Ansichten über die ‚Anschauung'" ab. Aber:

> Nein, die Mathematik nimmt keinen fremden Credit in Anspruch. Wir müssen uns auf den Standpunkt stellen, der sich in den letzten Jahrzehnten bei den Mathematikern herausgebildet hat und als Formalismus oder auch als Nominalismus bezeichnet wird.
>
> Die Mathematik sieht vollständig ab von der actualen Bedeutung, die man ihren Begriffen geben, von der actualen Gültigkeit, die man ihren Sätzen zusprechen kann. Ihre indefiniblen Begriffe sind willkürlich gewählte Denkobjecte, ihre Axiome willkürlich, jedoch widerspruchsfrei gewählte Beziehungen zwischen diesen Objecten. Die Mathematik ist Wissenschaft des reinen Denkens, gleich der formalen Logik.[507]

Hausdorffs „Analyse des Zeitbegriffs" im zweiten Kapitel seiner Vorlesung führt vor, wie er sich eine Anwendung des so charakterisierten formalen Standpunkts auf einen nicht allein der Mathematik angehörigen wissenschaftlichen Begriff dachte.[508]

Hausdorff erinnerte seine Hörer zunächst (ähnlich wie in der Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese*) an die traditionellen Bestimmungen der Zeit, wie sie etwa in Liebmanns *Analysis der Wirklichkeit*, aber auch in anderen Texten unter dem schon von Kant verwendeten Stichwort „Axiome der Zeit" aufgeführt waren. Nun nutzte er diese Bestimmungen, um schrittweise seine eigene axiomatische Analyse des mathematischen Zeitbegriffs zu entfalten. Dabei betonte er an jeder Stelle, welche Alternativen möglicherweise diskutiert werden mussten, welche konkreten mathematischen Beispiele den jeweiligen Axiomen genügten (auch an dieser Stelle verwendete er hierfür noch nicht den Begriff der Modelle, vgl. dazu aber oben, Abschnitt 4.3.1, und unten, Abschnitt 4.4.1), und schließlich, dass an keiner Stelle der formalen Überlegung bereits etwas über die empirische Relevanz oder Gültigkeit der gewählten Axiome geschlossen werden konnte. Die Schritte dieser axiomatischen Analyse der Zeit waren:

(1) Zeit ist etwas, das Teile besitzt, und „wenn zwei Zeittheile keinen Zeittheil gemeinsam haben, so ist der eine der frühere, der andere der spätere".

[507]Vgl., auch für die vorangestellten Zitate, *Zeit und Raum*, Blatt 3-4.

[508]Einen knappen Überblick über diesen Teil von *Zeit und Raum* gibt bereits [Scholz 1996], S. 110-113.

Um die Diskussion zu vereinfachen, führte Hausdorff als nächstes „untheilbare Zeittheile (Momente)“ ein.[509] Dies erlaubte ihm die Heranziehung der Mengenlehre für die weitere Untersuchung. In der Tat war sein erstes Axiom in kurzer Form:

> (α) Die Zeit ist eine einfach geordnete Menge von Momenten.[510]

Den hier vollzogenen Wechsel vom informellen Reden über Zeitteile zu einer formalen Theorie geordneter Mengen verband Hausdorff mit epistemologischen Kommentaren, in denen er etliche Motive der Zeitdiskussion von *Das Chaos in kosmischer Auslese* wieder aufgriff. Insbesondere warnte er seine Zuhörer vor einer „wirklichen Schwierigkeit“, die aber in der formalen Analyse nicht behandelt werden müsse, und die in der „Definition des wirklichen, actuellen erfüllten Moments“ liege, für die er hier wie in seiner Monographie den Namen „Weltzustand“ vorschlug. Da „alle Wirklichkeit uns nur in Form von Bewusstseinserscheinungen gegeben“ ist, und da „jede Bewusstseinserscheinung zeitlich ausgedehnt ist“, hat das Bewusstsein keinen Zugang zum einzelnen Moment:

> Der Psychologie ist der Moment unerreichbar. Nur in der physikalischen oder metaphysischen Deutung des Weltgeschehens ist es möglich, auch dem momentanen Weltzustand einen Sinn beizulegen; z.B. in der materialistischen Deutung ist Weltzustand = Lage bewegter Massen im Raume.[511]

Daher war genaugenommen bereits das Axiom (α) – und mithin alles weitere – empirisch nicht erzwungen.

Es gab noch andere Schwierigkeiten. Zum einen waren sehr unterschiedliche mathematische Formen von Zeit auf der Basis von (α) denkbar, die von einer endlichen oder abzählbaren Menge diskreter Momente („Clifford's kinematographisches Weltbild“) bis zu einer der Möglichkeiten, die Punkte einer Fläche einfach zu ordnen (indem etwa in $\mathbb{R}^2$ die Ordnung gewählt wurde, in welcher $(x, y) < (x', y')$ genau dann gilt, wenn entweder $x < x'$ oder $x = x'$ und $y < y'$ ist), und darüber hinaus reichten.[512]

Während dieses Spektrum von Möglichkeiten durch weitere Axiome eingeschränkt werden konnte, war (α), wie Hausdorff ebenfalls betonte, vielleicht bereits zu restriktiv, da es zyklische Zeitformen ausschloss: „Cyklische Vorstellungen von der Zeit sind seit den Pythagoräern bis auf d. Gegenwart (Nietzsche) immer wieder aufgetaucht, und ihre Ausspinnung verstösst nicht gegen die Logik“.[513]

---

[509] *Zeit und Raum*, Blatt 7.
[510] Ebd., Blatt 9.
[511] Ebd., Blatt 8. Wie wir gesehen haben, war das Motiv der Unerreichbarkeit des Moments in der psychologischen Debatte des 19. Jahrhunderts schon mehrfach aufgetaucht, nicht zuletzt bei Henri Bergson, vgl. Abschnitt 2.3.7. Zur Problematik des Begriffs des Weltzustands vgl. Abschnitt 2.3.3.
[512] Ebd., Blatt 10. Hier kritisierte Hausdorff auch eine Passage in Wilhelm Wundts *Logik*, in welcher dieser die Eindimensionalität der Zeit mit ihrer einfachen Ordnung zu identifizieren schien.
[513] Ebd.

Diese Bemerkung macht die Haltung Hausdorffs zu seiner eigenen formalen Analyse deutlich. Ihre Bedeutung, so formulierte er, „empfangen unsere Festsetzungen [...] erst durch d[ie] wirkliche Anwendung“. Die Axiomatik der Zeit war eben kein apriorisches Unternehmen, sondern stellte nur eine Beschreibungsform für das „zeiterfüllende Geschehen“ zur Verfügung.

(2) Nach einem ausführlichen Einschub über die Logik von Relationen nach Bertrand Russells *Principles of Mathematics*[514] sowie nach einer relationalen Definition von Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft auf der Basis von (α) folgte dann eine Diskussion der Stetigkeit der Zeit. Hausdorff führte dazu zwei weitere Axiome ein:

> (β) Zwischen irgendzwei Momenten A, C befindet sich stets ein dritter Moment B, sodass $A < B < C$ oder $A > B > C$.
>
> (γ) Wenn irgendzwei exclusive Theile zusammen die ganze Zeit darstellen, so existirt entweder ein letzter Moment des vorangehenden oder ein erster des nachfolgenden Theiles.[515]

Hausdorff nannte die durch (β) geforderte Eigenschaft die „niedere Stetigkeit“, die durch (γ) geforderte die „höhere Stetigkeit“ der Zeit.

Während (β) Cliffords diskrete Zeit ausschloss, war (γ) ausdrücklich nach Dedekinds Stetigkeitsaxiom für die reellen Zahlen gewählt. Hausdorff bemerkte allerdings, dass z.B. das Einheitsquadrat mit der oben genannten Ordnung für (α) immer noch (β) und (γ) erfüllt.

Er fügte ebenfalls an, dass weder (β) noch (γ) durch „wirkliche Gründe“, also aus empirischen Tatsachen des Bewusstseins gerechtfertigt werden konnten, und er konnte sich die Spitze nicht verkneifen, dass die allermeisten Philosophen (seiner Zeit) die Bedeutung von (γ) nicht verstünden und bereits (β) für eine ausreichende Charakterisierung der Stetigkeit ansähen.

(3) In der Vorlesung folgte ein weiteres Zwischenspiel, in welchem Hausdorff weitere Begriffe über geordnete Mengen einführte (Ähnlichkeit, Kardinalität, Ordnungstypus, die Ordnungstypen der reellen Zahlen und der rationalen Zahlen). Der dritte Schritt der Zeitaxiomatik bezog sich dann auf die seit Newton vieldiskutierte Idee der Homogenität der Zeit. Das entsprechende Axiom war:

> (δ) Jede Zeitstrecke ist jeder anderen Zeitstrecke ähnlich (von gleichem Ordnungstypus).[516]

Auch dieses Axiom war nicht „denknotwendig“, da sich eine Zeit denken ließe, in welcher keine zwei Zeitintervalle AB, AC einander ähnlich waren („wo man

[514] Die *Principles of Mathematics* waren 1903 erschienen. Hausdorff zählt mithin zu den ersten Mathematikern, die sich unmittelbar nach dem Erscheinen des Werkes in ihrer akademischen Lehre darauf bezogen. Umgekehrt mag die Ausarbeitung der Vorlesung *Zeit und Raum* mit zu den Motiven seiner Rezeption gehört haben. Hausdorffs Auseinandersetzung mit Russell mündete in einer kurze Zeit später gedruckten, ausführlichen Rezension von Russells Buch, vgl. [H 1905]; HGW, Band IA, S. 481-487, sowie den Kommentar von Peter Koepke, HGW, Band IA, S. 488-496.

[515] *Zeit und Raum*, Blatt 14 und 16.

[516] Ebd., Blatt 20.

also absolute und nicht nur relative Zeitbestimmung hätte"), am Rand steht: „Concert und Generalprobe".

Während (δ) ziemlich restriktiv ist (so war die oben genannte Ordnung des Einheitsquadrats nun ausgeschlossen), erlaubten (α)-(δ) immer noch eine Vielzahl von Modellen (wie wir heute formulieren würden), z.B. eine Zeit mit Momenten $x = (x_1, x_2, ...)$ mit x_i in $[0, 1]$ und $x < y$ genau dann, wenn die erste nichtverschwindende Differenz $x_i - y_i < 0$ ist.[517]

(4) Schließlich führte Hausdorff ein Axiom der „Messbarkeit" der Zeit ein. Dabei warnte er sein Publikum erneut, dass lediglich der Zeitinhalt (durch den Vergleich verschiedener Ereignisse) gemessen werden konnte, nie die „Zeit selbst". Die formale Eigenschaft, die er hier heranzog, war die einer Kongruenz (oder „Gleichheit") von Zeitintervallen. Er forderte mithin die Existenz einer Äquivalenzrelation „=" für Ordnungsintervalle, für die galt:

> (ϵ) Ist $AB = PQ, BC = QR$, so ist auch $AC = PR$. Ist AB eine beliebige Strecke und P ein beliebiger Moment, so giebt es stets einen und nur einen Moment O sowie einen und nur einen Moment Q, derart dass $AB = OP = PQ$.[518]

Hierin, sagte Hausdorff, lag eigentlich sowohl die Eindimensionalität als auch die Unendlichkeit der Zeit. Er fügte hinzu, dass William Thomsons frühere Spekulation über die Dissipation von Energie im Universum im Grunde die Vorstellung stützen könnte, dass eine endliche Zeit für die Beschreibung des physikalischen Geschehens ausreichend sein könnte.

Einige weitere Konstruktionen führen Hausdorff schließlich zu dem Nachweis, dass eine Zeit, die den Axiomen (α) - (ϵ) genügte, in eineindeutige Korrespondenz mit den auf natürliche Weise geordneten reellen Zahlen gebracht werden konnte. Hausdorff schloss dieses Kapitel seiner Vorlesung mit einer Zusammenfassung all seiner Warnungen über den epistemologischen Status der so aufgebauten formalen Axiomatik der Zeit:

> Jedenfalls sind alle diese Formulirungen nicht so, dass die innere Anschauung unmittelbare Evidenz von ihnen gäbe. Die Zeit eine logische Construction von ziemlichem Complicationsgrade, ersonnen zur Beschreibung der Wirklichkeit. Und strenggenommen wissen wir nicht, können wir nicht wissen, ob jener wissenschaftliche Zeitbegriff vollständig richtig ist: ob die Zeit nicht periodisch ist (Eindeutigkeit), ob sie überalldicht ist (Clifford, Boltzmann), ob sie Dedekindsche Stetigkeit hat (vielleicht nur überalldicht, t nur rationale Zahlen), ob sie unendlich ist (W. Thomson). Diese Fragen werden beim objectiven Problem (II) wiederkehren.[519]

In der Tat knüpfte er an diese Überlegungen dann im zweiten Teil seiner Vorlesung über das „objective Problem" von Zeit und Raum wieder an. Auch hier stellte er eine Diskussion der Kantischen Thesen über Zeit und Raum an den

[517] *Zeit und Raum*, Blatt 20.
[518] Ebd., Blatt 21.
[519] Ebd., Blatt 24.

Beginn seiner Ausführungen, namentlich der These, bei Zeit und Raum handele es sich um a priori gegebene Formen der Anschauung, und der These von der transzendentalen Idealität des Raumes und der Zeit. Der ersten These stellt Hausdorff nun seine Ansicht gegenüber:

> Die Gewissheit der Mathematik ist formal-logischer Natur und bedarf keiner eigenen Erkenntnissquelle. Die Auswahl eines Systems mathematischer Begriffe und Sätze, die zur Beschreibung der räumlichen und zeitlichen Wirklichkeit geeignet sind, wird innerhalb eines gewissen Spielraums willkürlicher Convention durch die Erfahrung bestimmt.[520]

Dies, also die zentrale Aussage der in der Antrittsvorlesung *Das Raumproblem* als „besonnener Empirismus" bezeichneten Position, so erläuterte Hausdorff nun, war eine „formalistisch-empiristische Ansicht": Sie erweiterte den Empirismus um die Analyse der Möglichkeiten formaler mathematischer Präzisierung der empirischen Begriffe, die zugleich den nur konventionell zu entscheidenden *Spielraum* solcher Mathematisierungen innerhalb der jeweils gegebenen Grenzen der Erfahrung darlegte.

Hausdorff merkte an, dass damit die – vorerst ohne Resultat gebliebene – Kantische Suche nach a priori gegebenen Bedingungen möglicher Erfahrung noch nicht endgültig obsolet war. Er deutete insbesondere zwei Wege an, auf denen Ergebnisse einer vertiefenden Untersuchung dieser Bedingungen doch zu erwarten sein könnten. Zum einen wäre eine Untersuchung der „Zusammenhänge der grundlegenden Eigenschaften von Raum und Zeit mit den grundlegenden Eigenschaften der *physikalischen* Welt [...], von denen das Bewusstsein doch auch zuletzt abhängt", vielversprechend; zum anderen glaubte er, wiederum ganz im Sinne von Helmholtz, auch „*physiologische* Forschungen könnten zu ‚Bedingungen möglicher Erfahrung' führen".[521]

Auf der anderen Seite hielt Hausdorff, wie nicht anders zu erwarten, an Kants These von der Idealität der Zeit fest. In der Erläuterung dieser These griff auch der Dozent der Jahre 1903/1904 wieder auf den Schriftsteller des Jahres 1898 zurück; wieder betonte er, „dass es ein sinnloses Chaos [...] sein kann, in das nur unser Bewusstsein Ordnung und Bestimmtheit hineinliest".[522] Hausdorff blieb also unverändert ein entschiedener Gegner jeder Überzeugung, dass eine bestimmte objektive Struktur von Zeit (und Raum) wissenschaftlich (physikalisch, philosophisch,...) ein für alle Mal festgelegt werden könnte. Auf der einen Seite lässt die Erfahrung stets einen gewissen Spielraum für konventionelle mathematische Beschreibung; auf der anderen Seite bleibt die Erfahrungswelt der Anhaltspunkt für jeden wissenschaftlichen Zeitbegriff. Der Mathematik kommt dabei die Klärung der genauen Eigenschaften zu, die man von einem Begriff wie der Zeit fordern kann. Die axiomatische Analyse, so dachte Hausdorff, macht eben den Spielraum sichtbar, welchen die Erfahrung lässt, und deckt – namentlich durch die Konstruktion von Beispielen für Systeme mathematischer

[520] *Zeit und Raum*, Blatt 56.
[521] Ebd., Blatt 58.
[522] Ebd., Blatt 63.

Dinge, welche die gegenseitigen Abhängigkeiten von postulierten Eigenschaften sichtbar machen können – dasjenige an den jeweiligen wissenschaftlichen Überzeugungen auf, was nicht selbstverständlich ist bzw. als selbstverständlich angenommen werden darf.

4.3.3 Vom Transformationsprinzip zu den Modellen eines Axiomensystems

Bevor wir weitergehen, sei noch ein kurzer Blick auf die neuen Aspekte in der Diskussion des Raumproblems geworfen, die sich in Kapitel 4 der Vorlesung *Zeit und Raum* finden. Viele Aspekte des hier behandelten Materials stützen sich auf die früheren Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie. Darüber hinaus, und dieser Punkt sei hier allein herausgegriffen, findet sich eine interessante Neubeschreibung seines „Transformationsprincips", das er nun auch „Abbildungsprincip" nannte. Diese Neubenennung erfolgte in explizitem Anschluss an die Überlegungen, die Heinrich Hertz in der Einleitung seiner *Mechanik* über die mathematischen „Bilder" der Wirklichkeit angestellt hatte, und an die axiomatische Methode, die Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie* eingeführt hatte.

Das neu formulierte Prinzip wurde bereits in den einführenden Bemerkungen der Vorlesung zum Formalismus ins Spiel gebracht. Dort diskutierte er das Verhältnis der reinen und der angewandten Mathematik im Anschluss an das Hertzsche „Gedankenbild":

> Summa: reine Mathematik setzt willkürliche Anfänge des Denkens (Begriffe, Definitionen, Axiome) und entwickelt daraus die logische Kette der Folgerungen. Angewandte Mathematik schränkt diese Willkür ein, so dass die von ihr geschaffenen Wesen (ideas created by convention, A. N. Whitehead) eine Verwandtschaft oder Correlation mit actuell existirenden Dingen erhalten, das Gedankensystem als „Scheinbild" einer Wirklichkeit entspricht.[523]

Die hiermit eingeführte Vorstellung einer Zuordnung oder „Correlation" der in einem axiomatischen System beschriebenen Begriffe mit „actual existirenden Dingen" erlaubte Hausdorff nun eine neue Interpretation dessen, was er das „äusserst fundamentale Transformationsprincip" nannte.

Im Kapitel über den Raum wurde dieses nun ausdrücklich eingeführt als das auch von Hilbert in seiner Auseinandersetzung mit Frege betonte Prinzip der „Ersetzbarkeit der Elemente" eines axiomatisch eingeführten Systems von geometrischen Dingen: Was auch immer mit einer passenden Interpretation der definierten Begriffe ein Axiomensystem erfüllt, kann in diesen Begriffen beschrieben werden.[524] Dies galt insbesondere zwischen verschiedenen Systemen mathematischer Dinge, in welchen bei passender Interpretation dieselben Axiome erfüllt waren. Für den Fall verschiedener Systeme geometrischer Objekte, welche denselben Axiomen genügten, erläuterte Hausdorff:

---

[523] *Zeit und Raum*, Blatt 6.

[524] Vgl. David Hilberts vielzitierte Antwort auf eine entsprechende Kritik in seinem Brief an Gottlob Frege vom 29. 12. 1899, abgedruckt in [Frege 1980], S. 13.

> Man kann dies Abbildungsprincip als eine Art Übersetzung aus einer geometrischen Sprache in die andere veranschaulichen, unter Zugrundelegung eines Lexikons.[525]

Der unmittelbare Kontext, in dem Hausdorff sein Prinzip einführte, war allerdings zunächst nicht mehr erkenntnistheoretischer, sondern beweistheoretischer Art. In der Tat ging es um die Gültigkeit der euklidischen Geometrie, die wie Hausdorff erläuterte, in Hilberts Weise durch „Abbildung“ der geometrischen Begriffe auf arithmetische Gegenstücke nachgewiesen wurde:

> Die Widerspruchlosigkeit des willkürlich gewählten Axiomensystems muss bewiesen werden. Das geschieht durch Arithmetisirung. Ebenso die Widerspruchslosigkeit der nichteuklidischen Geometrien; entweder direct, durch Arithmetisirung, oder durch Abbildung auf euklidische Verhältnisse.[526]

In manchen Passagen nutzte Hausdorff nun wie bereits in den oben besprochenen kurzen Bemerkungen seiner Antrittsvorlesung auch den Ausdruck „Modell“ für derartige „Bilder“; vorerst allerdings noch immer nur dann, wenn das „Bild“ eines geometrischen Systems von Dingen in der euklidischen Geometrie gefunden werden konnte. So wählte er etwa den Fall der sphärischen Geometrie als erstes Beispiel für die Diskussion der Widerspruchsfreiheit einer nichteuklidischen Geometrie,

> weil sich für ihn unmittelbar ein *euklidisches Modell* auffinden lässt. Statt nämlich eine nichteuklidische Geometrie direct aus den zugehörigen Axiomen aufzubauen (wie es Bolyai und Lobatschefski [...] gethan haben), wollen wir euklidische Bilder der nichteuklidischen Verhältnisse suchen, d. h. unser Transformationsprincip anwenden oder ein Lexikon ersinnen, vermöge dessen sich euklidische Sätze in nichteuklidische übertragen lassen.[527]

Ähnlich sprach er einige Absätze weiter von dem „euklidischen Modell, dem Cayley'schen oder Beltrami'schen Bilde“ der hyperbolischen Geometrie.[528]

Soweit ich sehe, sind dies – zusammen mit den entsprechenden kurzen Passagen in *Das Raumproblem* – die ersten Fundstellen des Wortes „Modell“ in einem abstrakten Sinn, die sich in Hausdorffs Werk finden lassen. Sie bilden zugleich einen sehr frühen Beleg für eine Verwendung, die in Richtung der späteren mathematischen Modelltheorie weist. Auch in der Vorlesung geht freilich diese Verwendung noch Hand in Hand mit der älteren, materiellen Bedeutung des Ausdrucks Modell. So sprach er in der Illustration der Cliffordschen Torusfläche von folgendem

[525] *Zeit und Raum*, Blatt 32. Wie wir in Abschnitt 2.3.7 gesehen haben, hatte Poincaré schon 1891 für das Beltramische Interpretationsverfahren der nichteuklidischen Geometrien dieselbe Illustration verwendet, wie Hausdorff inzwischen vermutlich bekannt war.
[526] Ebd., Blatt 34-35.
[527] Ebd., Blatt 38.
[528] Ebd., Blatt 46.

> Modell: ein Glascylinder, den wir zum Ringe biegen; jedoch mit der Festsetzung, dass die Entfernungen so gemessen werden sollen, wie sie sich auf dem Cylinder ergaben.[529]

Demgegenüber findet sich die von ihm ausdrücklich eingeführte Terminologie der „Bilder“ und „Abbildungen“, oder davon abgeleitete Formen wie „Gedankenbild“ oder „Abbildungsprinzip“, wesentlich häufiger im Text. Es ist daher nicht klar, wie viel Gewicht Hausdorff zu diesem Zeitpunkt der abstrakten Rede von den (euklidischen) „Modellen“ beimaß.

4.4 Ein Buchprojekt

In der ersten Hälfte des Jahres 1904 dachte Hausdorff offenbar auch über eine monographische Abhandlung der Thematik seiner im Wintersemester 1903/1904 gehaltenen Vorlesung über *Zeit und Raum* nach. Auf einem Manuskriptblatt im Nachlass ist ein Brief des Verlages Veit & Comp. an Hausdorff vom 15. März 1904 überliefert, in dem um die Rücksendung eines (selbst nicht überlieferten) Verlagsvertrags gebeten wurde. Auf der Rückseite dieses Briefes notierte Hausdorff eine mögliche Gliederung der Monographie, die sehr eng am Aufbau seiner Vorlesung *Zeit und Raum* orientiert und für die ersten Teile etwas näher ausgeführt ist:

> Einleitung
>
> <u>Erster Theil</u>: Das formale oder mathematische Problem:
> Raum und Zeit als logische Constructionen
>
> <u>Zweiter Theil</u>: Das objective oder erkenntnistheoretische Problem:
> Raum und Zeit als Wirklichkeiten
>
> <u>Dritter Theil</u>: Das subjective oder psychologische Problem:
> Raum und Zeit als Bewusstseinsinhalte
>
> Oder I. Raum u. Z. als Begriffscomplexe
> II “ “ Thatsachencomplexe
> III “ “ Vorstellungscomplexe
>
> Eintheilung in Kapitel und Paragraphen (Durchgehende Nummern), z.B.
>
> <u>Erster Theil</u>. 1. Kapitel. Der Formalismus.
> 2. Kapitel. Die Axiome der Zeit
> 3. Kapitel. Die Axiome des euklidischen Raumes
> 4. Kapitel. Die nichteuklidische Geometrie.
> 5. Kapitel. Sonstige geometrische Systeme.
> usw. [530]

[529] *Zeit und Raum*, Blatt 50.
[530] NL Hausdorff, Fasz. 1067, Blatt 13.

Dass die Parallele mit der Vorlesung *Zeit und Raum* recht eng werden sollte, und dass man die Vorlesung daher auch als einen Schritt auf dem Weg zur Vorbereitung der geplanten Monographie verstehen kann, zeigt die ebenfalls beigefügte Feingliederung des zweiten Kapitels des ersten Teils, die sich eng am Aufbau des entsprechenden Kapitels der Vorlesung orientiert. Nach drei (im Entwurf nicht betitelten) Paragraphen des ersten Kapitels sollten folgen:

§ 4. Das Axiom der Zeitfolge
§ 5. Ordnung und Verkettung
§ 6. Die Axiome der Stetigkeit
§ 7. Die Mengenlehre
§ 8. Die Axiome der Messbarkeit[531]

Zu einer Fertigstellung der Monographie kam Hausdorff nicht mehr. Der wahrscheinlichste Grund dafür sind die ersten Veröffentlichungen Albert Einsteins und Hermann Minkowskis zur speziellen Relativitätstheorie, die Hausdorff rasch zur Kenntnis nahm und sich zu eigen machte, und die ihm klar gemacht haben müssen, dass eine Diskussion der wissenschaftlichen Formen von Zeit und Raum nun auf eine neue Grundlage gestellt werden musste.[532]

Dennoch erlaubt der Nachlass, sich eine recht genaue Vorstellung der Teile der geplanten Monographie zu machen. Neben der Vorlesung des Wintersemesters 1903/1904 dürften insbesondere die Vorlesung zur nichteuklidischen Geometrie, die Hausdorff im Sommersemester 1904 zum zweiten Mal hielt, und der populäre Aufsatz „Nichteuklidische Geometrie“, der vorerst unveröffentlicht geblieben war, das Material umreißen, das für die geometrischen Kapitel des ersten Teils des Buches vorgesehen war.[533] Für den zweiten Teil des geplanten Buches hätte Hausdorff den entsprechenden Teil der Vorlesung *Zeit und Raum* weiter ausbauen müssen. Am wenigsten Material bietet der Nachlass hinsichtlich des dritten, psychologischen Teils, am meisten dagegen für das erste Kapitel des ersten Teils. Diese beiden Stücke seien im Folgenden kurz besprochen.

4.4.1 „Der Formalismus ist der wahre Empirismus“

Das im Nachlass überlieferte und hier edierte Fragment, das Hausdorff mit „Erstes Kapitel, 1. Der Formalismus“ überschrieb, ist höchstwahrscheinlich eine erste Ausarbeitung des entsprechenden Abschnitts im geplanten Buch. Sie greift

[531] NL Hausdorff, Fasz. 1067, Blatt 13. Man vergleiche den nahezu identischen Aufbau der Vorlesung *Zeit und Raum*, wie er in Abschnitt 4.3.2 beschrieben wurde.

[532] Zu Hausdorffs eigener Auseinandersetzung mit der Relativitätstheorie siehe unten in Abschnitt 5.1.

[533] Vgl. Abschnitte 4.2.2 und 4.2.3. Möglicherweise hängt die Entscheidung Hausdorffs, das zuletzt genannte Manuskript nicht in einer Zeitschrift zu veröffentlichen, mit dem Plan des neuen Buches zusammen. Dafür spricht auch, dass die wahrscheinlich für den Aufsatz vorgesehene Zeitschrift, die von Ostwald herausgegebenen *Annalen der Naturphilosophie*, in der auch Hausdorffs Antrittsvorlesung erschienen war, ebenfalls im Verlag Veit & Co. erschien und dort offenbar ein Interesse an Hausdorffs Schriften bestand; eine Umdisposition wäre daher wohl ohne größere Schwierigkeit möglich gewesen.

Hausdorffs frühere Ausführungen zum Formalismus auf und stellt sie in einer sprachlich und sachlich druckreifen Form dar. Der Text ist sicherlich – jedenfalls für diese Zeit – die definitive Fassung seiner einschlägigen Überlegungen zum Thema.

Die Ausarbeitung beginnt mit einer prägnanten Diskussion der epistemologischen Stellung der Mathematik im Gefüge aller Wissenschaften, in deren Zentrum eine Unterscheidung zwischen der (epistemischen) *Autonomie* und *Heteronomie* der Mathematik steht. Eingeführt wird die Unterscheidung im Rahmen einer Diskussion der Geometrie:

> Die geschichtlichen Thatsachen zeigen umgekehrt, dass die Mathematik jederzeit als Typus einer strengen, unabhängigen, autonomen Wissenschaft gegolten und sich als solcher um so reiner durchgesetzt hat, je weniger sie das Ergebniss philosophischer Bemühungen abzuwarten die Geduld fand. Es giebt nur eine Erklärung dafür: die Geometrie redet nicht vom wirklichen Raume, sie redet von einem Erzeugniss frei schaffenden Denkens. Die Gewissheit der Geometrie ist die Gewissheit der formalen Logik.[534]

Mit der in dieser Bemerkung betonten Abgrenzung von der Philosophie ist zugleich die in *Zeit und Raum* vorgetragene Ansicht konsolidiert, dass an die Stelle einer a priori möglichen (Transzendental-)Philosophie höchstens die Mathematik als Produkt „frei schaffenden Denkens“ treten könne, nur hier war eine von aller Erfahrung unabhängige Erkenntnis zu haben. Hausdorff macht ebenfalls klar, dass er sich eine bestimmte Form der später als Logizismus bezeichneten Position hinsichtlich der Grundlagen der Mathematik zu eigen machte – freilich eine, welche die Logik nicht als (wie auch immer realistisch verstandene) Wissenschaft von den Gesetzen menschlichen Denkens verstand, sondern als eine selbst rein *formale* Wissenschaft:

> Die einzige Art Gewissheit, die wir kennen, ist die der *formalen Logik*.[535]

Zugleich mit der Betonung der Autonomie der formal begründeten Mathematik stellte Hausdorff in seinem Manuskript aber auch die ebenfalls zentrale Überlegung vor, dass die *heteronom* erfolgende, weil auf bestimmte Bereiche der Wirklichkeit gerichtete *Anwendung* der Mathematik auf einer mehr oder weniger gut begründeten, aber konventionellen Zuordnung der mathematischen Begriffe zu Gegenständen der erfahrenen Wirklichkeit beruht. Da die Mathematik selbst über letztere jedoch nichts aussagen kann, sondern auf die Vorarbeit anderer Wissenschaften – sei es der Psychologie der Erfahrung, sei es der philosophischen Klärung der Bedingungen ihrer Möglichkeit – angewiesen ist, wäre also etwa die Geometrie, „als Lehre vom wirklichen Raume, in den Zustand wartender Abhängigkeit von fremden Entscheidungen, in den Zustand der Heteronomie gedrängt.“[536]

---

[534] NL Hausdorff, Fasz. 1067, Blatt 2.

[535] Ebd., Hervorhebung im Original. Eine ausführlichere Diskussion von Hausdorffs Anschauungen zu den technischeren Grundlagenfragen der Mathematik gibt Walter Purkert in Band IB der Edition, S. 681-695.

[536] NL Hausdorff, Fasz. 1067, Blatt 2.

Dennoch war die Anwendung mathematischer Begriffe auf die empirische Wirklichkeit selbstverständlich möglich, ja wissenschaftlich unerlässlich. Dies geschah, so formulierte Hausdorff sehr klar, durch Interpretation der mathematischen Sprache:

> Sobald diesen Symbolen ein actueller Sinn beigelegt wird, eine Beziehung zur Wirklichkeit, treiben wir angewandte Mathematik, wir zählen wirkliche Dinge, messen wirkliche Grössen, analysiren wirkliche Empfindungscomplexe.[537]

Diese Beilegung eines „actuellen Sinns" gehörte freilich nicht mehr der Mathematik selbst an. Sie war daher nicht mehr zwingend, sondern ließ, wie Hausdorff bereits in seiner Antrittsvorlesung für den Raum dargelegt hatte, immer einen „Spielraum der Erfahrung", der konventionell gefüllt werden musste.[538]

Direkt gegen Kants Ansichten zu den Grundlagen der Mathematik gerichtet war ferner ein längerer, brillant formulierter Abschnitt, in welchem Hausdorff die Vorstellung zurückwies, dass mathematische Gewissheit durch „reine Anschauung" gegeben werden könne.

> In der ganzen philosophischen Discussion seit Kant ist die Mathematik, oder wenigstens die Geometrie, stets als heteronom behandelt worden, als abhängig von einer fremden Instanz, die wir, nähere Bestimmung vorbehalten, als Anschauung bezeichnen können, mag es nun reine oder empirische, subjective oder wissenschaftlich corrigirte, angeborene oder erworbene Anschauung sein. Von dieser Abhängigkeit sich zu befreien, aus der Heteronomie zur Autonomie sich durchzukämpfen war die wichtigste principielle Aufgabe der modernen Mathematik.[539]

Die an diese Bemerkungen anschließenden Ausführungen, die bis zum Ende des erhaltenen Textfragments reichen, erläutern einen sehr weit von Kant entfernten Begriff der Anschauung, der durchaus von wissenschaftlichem Interesse war, sich freilich nicht zur Begründung der Geometrie eignete: „Die Anschauung", schrieb Hausdorff, „ist ungenau, beschränkt, irreführend, individuell, wandelbar"[540], um im Anschluss jede einzelne dieser Charakterisierungen weiter zu erläutern.

Führt man die entschiedene Verteidigung des Formalismus zusammen mit der von Hausdorff in dieser Phase ebenso entschieden verteidigten Bedeutung der axiomatischen Analyse, sowohl im Aufbau von mathematischen Theorien wie auch in der Diskussion von deren Anwendungen, d.h. von Zuordnungen mathematischer Dinge zu Gegenständen der erfahrenen Wirklichkeit wie Zeit und Raum, so ergeben sich klare methodologische Konsequenzen für den von ihm verteidigten „besonnenen Empirismus". Verband man das axiomatische Verfahren Hilberts – die schrittweise Exploration formal-logischer Zusammenhänge

[537] NL Hausdorff, Fasz. 1067, Blatt 4.
[538] Vgl. oben, Abschnitt 4.3.1.
[539] NL Hausdorff, Fasz. 1067, Blatt 7.
[540] Ebd., Blatt 9.

eines mathematischen Gebäudes – mit einer Analyse möglicher empirischer Anwendungen, so ergab sich eine präziser gefasste Alternative zu dem, was Mongré in *Das Chaos in kosmischer Auslese* als „analytische Zergliederung“ oder als das „apagogische“ Verfahren seiner Erkenntniskritik bezeichnet hatte.[541] Diese Alternative war in ihrer grundsätzlichen epistemologischen Tendenz freilich eng verwandt. In *Das Chaos in kosmischer Auslese*, so haben wir gesehen, wurde eine gegebene mathematische Struktur durch eine Kette von immer weiter von der Identität entfernten Transformationen schrittweise modifiziert und die resultierenden Strukturen auf ihre empirische Zulässigkeit bzw. Relevanz hin geprüft. Die formal-empirische Methode, die Hausdorff nun verteidigte, variierte die Zuordnung eines empirischen Sinns zu mathematischen Begriffen sowohl durch Modifikation der definierenden Axiome als auch durch die Konstruktion von unterschiedlichen Modellen. Wiederum konnten dabei die Vielfalt der axiomatischen Beschreibungen und der möglichen Modelle jeweils auf ihre empirische Relevanz bzw. Zulässigkeit hin überprüft werden. Ja, diese Prüfung war für jede mathematisierte Wissenschaft eines Bereiches unserer empirischen Welt geradezu unerlässlich. Deshalb, so hatte sich Hausdorff schon in einem oben besprochenen Manuskript notiert, galt auch: „Der Formalismus ist der wahre Empirismus.“[542]

4.4.2 „Psychologisches“

Bereits in den Schriften Paul Mongrés über Zeit und Raum war klar erkennbar, dass Hausdorffs Überlegungen sich die sinnesphysiologische und empirisch-psychologische Wendung der Erkenntniskritik des 19. Jahrhunderts zu eigen gemacht hatte, die er schon in seiner Studienzeit und nicht zuletzt durch seine Mitwirkung an den Experimenten Münsterbergs kennengelernt hatte. So etwa im Kapitel „Vom Raume“ in *Das Chaos in kosmischer Auslese*, wenn er die Imagination einer Raumvariation durch Verkürzung in lediglich einer von drei Dimensionen wie folgt durchspielte:

> Versuchen wir uns in laienhafter Weise einige Hauptpunkte klar zu machen, so bemerken wir, dass mit dem Netzhautbild gleichzeitig und gleichartig auch die Netzhaut selbst transformiert wird, sodass vor wie nach der Transformation dieselben Netzhautstellen von denselben Lichtstrahlen getroffen werden. Es wird also dem (übrigens ebenfalls mit transformirten) Gehirn nach wie vor dasselbe System von Nachrichten durch Nervenerregung zugeleitet, und das daraus intellectuell aufgebaute Bewusstseinsbild eines äusseren Gegenstandes kann und wird wohl auch dasselbe bleiben. Überhaupt ist doch wohl die Netzhaut als selbst räumliches Gebilde für den Process des räumlichen Sehens sehr gleichgültig, dient vielmehr nur als Schaltbrett, das die „Localzeichen“ weiterbefördert und bestimmten Nervenenden bestimmte Erregungen zuführt.[543]

[541] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 6.
[542] NL Hausdorff, Fasz. 1079, Blatt 1, vgl. oben, Abschnitt 3.6.1.
[543] *Das Chaos in kosmischer Auslese* S. 94 f.

Hier argumentierte Mongré ganz im Horizont der Helmholtzschen Perspektive auf das Sehen.[544] Auch in seinen späteren Schriften und Vorlesungen zu Zeit und Raum betonte er immer wieder die Bedeutung der sinnesphysiologischen Arbeiten seiner Zeit, und wie wir ebenfalls gesehen haben, räumte er sogar ein, dass sich auf diesem Weg vielleicht doch gewisse allgemeine Bedingungen menschlicher Erkenntnis ermitteln ließen.[545] Zugleich blieb Hausdorff von dem entschiedenem Empirismus in Bezug auf die Psychologie geprägt, den er bei Münsterberg sowie bei Delbœuf und anderen Autoren des 19. Jahrhunderts kennengelernt hatte.[546] Daher war die so allenfalls mögliche Form einer Suche nach Bedingungen der Möglichkeit menschlicher Erfahrung letztlich doch eine naturalisierte, erfahrungswissenschaftliche Form der Erkenntnislehre.

Es ist bedauerlich, dass sich über Hausdorffs Pläne für diesen Teil seiner geplanten Monographie, über „Das subjective oder psychologische Problem“, am wenigsten sagen lässt, und dass dessen Entsprechung auch im Manuskript seiner Vorlesung *Zeit und Raum* unausgeführt blieb. Im Nachlass ist lediglich eine dünne Mappe überliefert, der Hausdorff den Titel „Psychologisches“ gab. Sie ist ebenfalls in diesem Band ediert. Auch wenn sie nicht erlaubt, die Umrisse des geplanten Teils genauer zu erkennen, lassen sich doch einige Schlüsse darauf ziehen.

Das Konvolut beginnt mit einem ausgeführten Text von vier handschriftlichen Seiten zu den „Schemata der räumlichen Wahrnehmung“. Darin diskutierte Hausdorff, welche Möglichkeiten der menschliche Empfindungsapparat hatte, räumliche Informationen zu gewinnen. Dabei verglich er die Sinne des Hörens, des Sehens und des Tastens, und deutete an, welche Möglichkeiten der mathematischen Raumbeschreibung jeweils damit verbunden werden konnten. Es folgen einige fortführende Kommentare zu diesem Text, in denen Hausdorff unter anderem betonte, dass die Struktur der Raumwahrnehmung „erkennender Wesen“ von der Funktion ihrer Sinnesorgane bestimmt war, wobei Fehlschlüsse vermieden werden mussten, wie z.B. die Annahme, dass „die Organe erkennender Wesen als n-dimensionale Körper“ bedinge, dass die „Raumvorstellung ihres Trägers [...] nur n-dimensional functionieren.“[547]

Offenbar betrieb Hausdorff auch etliche Literaturstudien, um sich für diesen Teil der Monographie vorzubereiten. So enthält die Mappe beispielsweise Bemerkungen zu Passagen in Ernst Machs Schrift *Beiträge zur Analyse der Empfindungen*.[548] Auch bestimmte Stellen seiner eigenen Schrift *Das Chaos in kosmischer Auslese* kommentierte er in ähnlicher Perspektive, was nahelegt, dass er vorhatte, auch die auf dieses Thema bezüglichen früheren Überlegungen nun in eine neue, erfahrungswissenschaftlich gesättigte Form zu überführen. Dabei hielt er sicherlich an der harten Form eines psychologischen Empirismus

[544] Vgl. oben, Abschnitt 2.3.1.
[545] Vgl. Abschnitt 4.3.2.
[546] Vgl. Abschnitte 2.3.1 und 2.3.7.
[547] NL Hausdorff, Fasz. 1080, Blatt 6.
[548] Ebd., Fasz. 1080, Blatt 8. Die Notizen bezogen sich auf [Mach 1886], S. 99. In denselben Kontext gehört wohl auch Hausdorffs im vorliegenden Band wieder abgedruckte Rezension der Schrift *Leib und Seele* von Carl Stumpf, [H 1904i].

fest, für den, wie er in seiner Antrittsvorlesung formuliert hatte, die in der Wahrnehmung gegebenen Erfahrungen „faits accomplis“ waren, und mithin gerade im „subjectiven“ das Individuum *keinen* Spielraum besaß, seine „Empfindungskomplexe“ zu variieren. Angesichts dessen, dass diese These etwa zur selben Zeit in manchen Richtungen der empirischen Psychologie bereits wieder in Frage gestellt wurde, liegt in der sehr rudimentären Form von Hausdorffs Ausführungen zum „subjectiven Problem“ der Erkenntnis zweifellos eine der Begrenzungen seines „besonnenen Empirismus“.

5. Zeit- und raumtheoretische Motive nach 1905

Während die erste Phase der Hausdorffschen Beschäftigung mit Zeit und Raum durch das Werk des Schriftstellers Paul Mongré geprägt war, und nachdem Hausdorff in der zweiten Phase den Schriftsteller Mongré auf der Bühne seiner mathematischen Laufbahn hatte auftreten lassen, trat dieser in der dritten Phase seines Werkes endgültig in den Hintergrund, und die immer erfolgreicher verlaufende Laufbahn eines Professors der Mathematik verlangte Hausdorffs Aufmerksamkeit. Dabei distanzierte Hausdorff sich freilich nicht von seinen früheren erkenntniskritischen und literarischen Arbeiten, und noch in den Jahren 1909 und 1910 erschienen Schriften Paul Mongrés. Im Jahr 1910 erhielt Hausdorff dann einen Ruf auf eine außerordentliche Professur an der Universität Bonn, und spätestens ab dieser Zeit stand die mathematische Tätigkeit, der drei Jahre spätere Wechsel auf ein Ordinariat in Greifswald und die Vorbereitung seines 1914 erschienenen mengentheoretischen Hauptwerkes *Grundzüge der Mengenlehre* ganz im Vordergrund von Hausdorffs Leben.[549]

Auch wenn diese äußeren Wendungen seines Lebens sicherlich eine wichtige Rolle spielen, beginnt die dritte Phase von Hausdorffs Nachdenken über Zeit und Raum wahrscheinlich vor allem aus einem sachlichen Grund, nämlich mit seiner Rezeption der speziellen Relativitätstheorie Albert Einsteins, die es erforderte, seine bisherigen Thesen über einen „besonnenen Empirismus" der Zeit und des Raumes noch einmal neu zu überdenken. Auch wenn wir nicht wissen, wie sein Leben ohne die Rufe nach Bonn und Greifswald verlaufen wäre, zeigen doch bereits die letzten Jahre in Leipzig eine deutliche Umorientierung von Hausdorffs wissenschaftlichen Interessen. Seinen Plan einer Monographie über Zeit und Raum verfolgte er nicht weiter; dagegen konzentrierte er sich ab 1905 mehr und mehr auf Untersuchungen über geordnete Mengen.[550] Auch die am Beginn dieses Bandes abgedruckte Liste seiner Veröffentlichungen zeigt eine deutliche Veränderung ab dem Jahr 1905. Zwischen 1903 und 1905 finden sich noch etliche Veröffentlichungen Mongrés sowie Rezensionen Hausdorffs von wissenschaftsphilosophischen Publikationen (etwa einer Übersetzung von William Kingdon Cliffords Schrift *Von der Natur der Dinge an sich* oder zweier Reden des empirischen Psychologen Carl Stumpf; beide sind im vorliegenden Band ediert) und von Schriften zur Logik (Bertrand Russell, Melchior Palágyi). Dagegen konzentrieren sich die Veröffentlichungen der Folgejahre fast ausschließlich auf die Mengenlehre. Wir müssen davon ausgehen, dass Hausdorff seine Pläne nicht zuletzt deshalb änderte, weil er kurz nach ihrem Erscheinen die Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper" von Albert Einstein las.

---

[549] Alle diese Ereignisse sind von Walter Purkert ausführlich beschrieben in HGW, Band IB, Kapitel 5 und 6.

[550] Vgl. dazu Purkert in HGW, Band IB, S. 637-681.

5.1 Hausdorffs Rezeption der Relativitätstheorie

Leider liegen uns bislang keine direkten biographischen Hinweise darauf vor, wann und wie Hausdorff von Einsteins bahnbrechender Abhandlung erfuhr.[551] Dennoch ist offensichtlich, dass Hausdorff mit der Kenntnisnahme von Einsteins Relativitätstheorie, und noch mehr nach der Beschäftigung mit Hermann Minkowskis berühmter Intervention zu „Raum und Zeit“ im Jahr 1908[552] die Position, die er in seiner Vorlesung *Zeit und Raum* vorgetragen hatte, grundlegend überdenken musste.

In seinen bisherigen Ausführungen, von der Niederschrift des Chaos-Buches bis zu seiner Vorlesung *Zeit und Raum* hatte er stets Zeit und Raum als zwar erkenntniskritisch weitgehend symmetrisch zu behandelnde, aber doch getrennte Konzepte aufgefasst. Selbst die symmetrischen, auf Zeit und Raum zugleich bezogenen Formulierungen seines Transformationsprinzips, in welchen er in „summarischer Ausdrucksweise“ von „Raumzeitpunkten“ gesprochen hatte, vollzogen nicht die physikalische Verschmelzung der beiden Begriffe, welche für die spezielle Relativitätstheorie grundlegend war. Dennoch dürfen wir davon ausgehen, dass er die von Lorentz, Poincaré und Einstein diskutierten Transformationen der Raum- und Zeitkoordinaten x, y, z, t gleichförmig gegeneinander bewegter Bezugssysteme unmittelbar als formale Sonderfälle der von ihm selbst früher diskutierten Transformationen zwischen Raumzeitpunkten erkannte, in welchen „alle vier Größen $xyzt$ *beliebige* Functionen der vier anderen $\xi\eta\zeta\tau$ oder umgekehrt“ waren.[553]

Mit der Lektüre von Einsteins Arbeiten muss ihm klar geworden sein, dass die „Zeitsuccession“ und die „Raumstructur“ nicht nur, wie in seinen früheren Überlegungen, aus erkenntniskritischen Gründen formal miteinander verbunden waren, sondern nun auch aus physikalischen Gründen. Auch die auf der Praxis der Zeitmessung beruhenden Überlegungen Einsteins zur Gleichzeitigkeit dürften Hausdorff unmittelbar die Notwendigkeit deutlich gemacht haben, dass die von ihm bisher angenommene und nicht zuletzt in seiner Vorlesung *Zeit und Raum* und dem gleichzeitigen Buchprojekt angelegte systematische Trennung von „Zeitsuccession“ und „Raumstructur“ nicht weiter haltbar war. Auch wenn Hausdorff den von ihm skizzierten „besonnenen Empirismus“ angesichts der neuen physikalischen Theorie nicht aufgeben musste, so wäre nun doch statt einer getrennten „formalistisch-empiristischen“ Analyse der Zeit einerseits, des Raumes andererseits, nur eine axiomatische und erkenntniskritische Analyse der von Minkowski betonten Einheit von beiden, also der vierdimensionalen Raumzeit, der passende Weg seiner Ausführung gewesen.

---

[551] Hausdorff zitierte später die Originalpublikation [Einstein 1905] in den *Annalen der Physik.*

[552] Minkowskis so betitelter Vortrag wurde auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1908 in Köln gehalten. Die gedruckte Fassung [Minkowski 1909] erschien ein Jahr später im *Jahresbericht der DMV.*

[553] *Das Chaos in kosmischer Auslese*, S. 142; vgl. oben, Abschnitt 3.2. Ein genaueres Nachzeichnen der Überlegungen Hausdorffs über die (symmetrische) Verbindung von Zeit und Raum, die sich von der Zeit der Niederschrift des Chaos-Buches an im Nachlass verfolgen lässt, wäre eine lohnende Aufgabe.

Aus einem wohl 1918 oder 1919 entstandenen populärwissenschaftlichen Manuskript Hausdorffs, das in diesem Band wiedergegeben ist und das wahrscheinlich den Text eines Vortrags zum Relativitätsprinzip enthält, geht hervor, dass Hausdorff die Relativitätstheorie als Wissenschaftler sehr begrüßte und sich für ihre weitere Verbreitung engagierte.[554] Seine Diskussion ist dabei immer wieder von erkenntnistheoretischen Motiven durchsetzt, die zeigen, dass er seinen allgemeinen Überlegungen weiterhin folgte. Daneben finden sich jedoch auch Passagen, die man als eine implizite Kritik an der besonderen Weise lesen kann, in der er seine eigene frühere Diskussion von Zeit und Raum angelegt hatte.

Ausgehend von der traditionellen Unterscheidung von „absoluten“ und „relativen“ Bewegungen von Himmelskörpern führte Hausdorff in diesem Manuskript seine Zuhörerinnen und Zuhörer zunächst zur Einsicht in die Konventionalität solcher Unterscheidungen. Die kopernikanische Astronomie sprach von der Ruhe der Sonne und der Bewegung der Planeten um die Sonne als den wahren Bewegungen vor allem deshalb, so Hausdorff, weil die dadurch erhaltene Beschreibung des Sonnensystems einfacher war als die auf der Annahme einer ruhenden Erde beruhende, frühere Beschreibung:

> Denn die Sätze des Copernicus sind doch nicht ganz inhaltlos. [Denn] die heliocentrische Auffassung, obwohl sie dieselben Relativbewegungen schildert wie die geocentrische, schildert sie in einfacherer Weise.[555]

Hier ging es um die Wahl eines Bezugsrahmens zur Beschreibung der Bewegungen von Himmelskörpern. Unter allen denkbaren Koordinatensystemen, die zur Beschreibung physikalischer Vorgänge gewählt werden konnten, so setzte Hausdorff fort, zeichnete diese konventionelle Wahl der möglichst einfachen Beschreibung die Klasse der Inertialsysteme aus, d.h. jener Koordinatensysteme, in welchen das „Galilei-Newtonsche Trägheitsgesetz“ galt.[556] Vor diesem Hintergrund konnte nun aber auch die Rede von einer „absoluten“ Bewegung wieder neu – definitorisch, nicht realistisch – gerechtfertigt werden:

> Nennen wir, auf Grund der Sonderstellung der Inertialsysteme, die Bewegung relativ zu einem unbestimmt gelassenen Inertialsystem K absolute Bewegung, so können wir sagen: absolute gleichförmige Translation verändert die Naturgesetze nicht und ist also unerkennbar, während andere Arten absoluter Bewegung sich erkennen lassen.[557]

Für die Mechanik genügte so das Kriterium der Einfachkeit, um eine Festlegung der besten Beschreibungen zu erlauben. Wie stand das aber, so fragte Hausdorff weiter, bei der Hinzunahme weiterer Bereiche der Physik, namentlich der Optik und Elektrodynamik? Hausdorffs Ausführungen hierzu folgten weniger

[554] Dafür, dass es sich um einen Vortrag handelte, spricht sowohl die Form als auch der (in Fachkreisen schon bekannte) Inhalt des Manuskripts. Wir wissen jedoch nicht, ob Hausdorff diesen Vortrag tatsächlich gehalten hat.
[555] NL Hausdorff, Fasz. 796, Blatt 6.
[556] Ebd., Blatt 9.
[557] Ebd., Blatt 11.

dem tatsächlichen Erkenntnisweg Einsteins als den zu dieser Zeit recht verbreiteten Argumenten, welche die Versuche Michelsons und Morleys ins Zentrum rückten. Hausdorff beschrieb seinen Hörerinnen und Hörern diese Versuche der Messung einer Differenz der Lichtgeschwindigkeiten tangential und orthogonal zur Erdbahn und ihr negatives Resultat:

> Der Ausfall des Michelsonschen Versuchs war ein dramatischer Augenblick, der vielleicht das Schicksal der Physik entschied.[558]

Er ging dann verschiedene Hypothesen zur Erklärung dieses Ergebnisses durch (darunter auch die Lorentzsche Kontraktionshypothese), die sich seiner Auffassung nach jedoch alle für die physikalische Theoriebildung als unpraktisch erwiesen hatten, sodass wieder ein konventioneller, aber wichtiger Schritt erfolgte:

> [...] und so musste sich bei den theoretischen Physikern wohl der Wunsch bilden, zu einer prophylaktischen Behandlung überzugehen, d. h. schon die Grundlagen der Theorie so zu gestalten, dass daraus die Unerkennbarkeit einer Bewegung gegen den Aether, die Unspürbarkeit des Aetherwindes nothwendig folgen musste. Diesen Wunsch hat in radicaler Weise A. Einstein erfüllt.[559]

Aus dem Lob der „radicalen Weise“, in der Einstein diesen Theorieschritt vollzog, indem er die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen gleichförmig gegeneinander bewegten Bezugssystemen theoretisch postulierte, lässt sich die Sympathie des auf seine Weise radikalen Mathematikers und Erkenntniskritikers Hausdorff herauslesen. Hausdorff wurde noch deutlicher:

> Mit dieser, allerdings unerhört kühnen, kritischen Revision der Grundlagen unserer Raum- und Zeitmessung gelang es Einstein nun wirklich, den Begriff der gleichförmigen Bewegung so zu fassen, dass in allen relativ gegeneinander gleichförmig bewegten Systemen die optischen und elektrodynamischen Gesetze dieselben sind [...].[560]

Damit war ausgesprochen, was Hausdorff bereits 1905 erkannt haben musste: Die Relativitätstheorie erforderte eine radikale, kritische Revision der Grundlagen des wissenschaftlichen Nachdenkens über Raum und Zeit. In den anschließenden Abschnitten des Manuskripts gab Hausdorff eine konkrete, nur mit sehr einfachen mathematischen Mitteln arbeitende Ausführung der Einsteinschen Überlegungen, namentlich eine Darstellung der einfachsten Lorentz-Transformationen sowie der Folgerungen, die aus dem Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit argumentativ gewonnen werden konnten.

Daran schloss er wieder einen allgemeinen Kommentar an, der einige wohlbekannte Stichworte seiner früheren Erkenntniskritik aufgriff und selbst den an ästhetischen Überlegungen interessierten Schriftsteller wieder aufblitzen ließ:

---

[558] NL Hausdorff, Fasz. 796, Blatt 17.
[559] Ebd., Blatt 19.
[560] Ebd., Blatt 20.

> Wenn wir uns über diese frappanten Einzelheiten zu einer allgemeinen Characteristik der neuen Theorie erheben wollen, so ist es gerade die raumzeitliche Verknüpfung, die „geeinte Zwienatur der innigen Beiden", dieser monistische Zug, der einen hohen erkenntnistheoretischen Genuss gewährt und uns über den anfänglichen Widerstand unseres Denkens und Anschauens hinweghilft – ganz zu schweigen von der mathematischen Schönheit der neuen Theorie, die besonders in den Arbeiten von Minkowski mit überwältigendem Glanze hervortritt.[561]

In die Diskussion dieser „allgemeinen Characteristik" der Wendung zu einer neuen, „monistischen" Theorie der Raumzeit schloss Hausdorff Sätze ein, die in derselben Formulierung tatsächlich schon in *Das Chaos in kosmischer Auslese* hätten stehen können, und die den dortigen Terminus des „Raumzeitpunktes" wieder aufgriffen, wie den folgenden: „Wir haben dann vier Grössen x, y, z, t, die zusammen einen einheitlichen Complex bilden, die Bestimmungsstücke eines Raumzeitpunktes, d. h. eines Ereignisses zu bestimmter Zeit an einem bestimmten Ort."[562] Allerdings liest sich die unmittelbar anschließende Bemerkung dann wie eine Selbstkritik:

> In der alten Mechanik bestand scharfe Trennung zwischen Zeit und Raum, und wenn man auch früher schon die Raumgrössen x, y, z mit der Zeitgrösse t zusammengefasst und von einer vierdimensionalen Welt gesprochen hat, so war das unfruchtbare Spielerei, die Zeit blieb für sich und betheiligte sich nicht an den Umgestaltungen des Raumes.[563]

Diese selbstkritische Einsicht wird Hausdorff nicht erst um 1918 gewonnen haben, sondern sicherlich schon unmittelbar nach der Kenntnisnahme der Einsteinschen Arbeit. In der Wendung von der „unfruchtbaren Spielerei" lässt sich auch ein resignativer Ton hören, der erklärt, warum die geplante Monographie über Zeit und Raum damals nicht zu Ende geführt wurde.

Freilich spürt man Hausdorffs Ausführungen auch an, welche zentralen Motive seines „besonnenen Empirismus" nach wie vor Bestand hatten. So diskutierte er insbesondere den mit der speziellen Relativitätstheorie verbundenen „Unbestimmtheits-Spielraum", den es in der neuen Fassung des Begriffs der Gleichzeitigkeit noch gab.[564] Auch die weiterhin bestehende Offenheit in der fortschreitenden Theoriebildung, die nur in einer sowohl empiristischen wie formalistischen Weise allmählich gefüllt werden konnte, unterstrich er zum Abschluss seines Manuskriptes, indem er darauf verwies, dass Albert Einstein selbst „in dieser schnelllebigen und metamorphosenreichen Periode physicalischer Forschung" bereits weiter gegangen war: zu einer allgemeinen Relativitätstheorie, die nun auch den Bereich der Gravitation und ein wesentlich radikaleres Relativitätsprinzip einbezog, und die damit bereits empirische Aussagen wie eine neue Erklärung der Periheldrehung des Merkur verbinden konnte.[565]

---

[561] NL Hausdorff, Fasz. 796, Blatt 32.
[562] Ebd.
[563] Ebd., Blatt 33.
[564] Ebd., Blatt 35.
[565] Ebd., Blatt 36.

5.2 Der Kontakt mit Moritz Schlick

Dem im vorigen Abschnitt besprochenen Manuskript zum Relativitätsprinzip stellte Hausdorff eine kurze Liste von Titeln der Literatur zur Relativitätstheorie voran, die zeigt, welche Literatur er zu diesem Zeitpunkt für besonders wichtig hielt. An erster Stelle steht Hermann Minkowskis Kölner Vortrag über „Raum und Zeit“, daneben finden sich weitere Arbeiten Minkowskis und die Originalpublikationen Einsteins zur speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie. Aber auch die im März 1917 in der Zeitschrift *Die Naturwissenschaften* erschienene philosophische Schrift „Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik“ von Moritz Schlick kannte Hausdorff bereits; wieder zählte er zu den frühen Lesern eines wissenschaftsphilosophisch bedeutenden Textes.[566]

Bei der Lektüre der 63 Seiten umfassenden Schrift Schlicks fand Hausdorff einige ihm wohlvertraute Überlegungen wieder. Zugleich lieferte ihm die Schrift sicherlich ihrerseits Hinweise darauf, wie er das Thema den Hörerinnen und Hörern seines Vortrags über das Relativitätsprinzip nahebringen konnte. Auch Schlick stellte nämlich nach einem kurzen einleitenden Überblick über Einsteins Neuerungen fest:

> Die fundamentalste Frage, die man über Zeit und Raum stellen kann, lautet, zunächst in ganz populärer, vorläufiger Formulierung: Sind Raum und Zeit eigentlich etwas Wirkliches?

Und auch Schlick diskutierte diese Frage zunächst – wie früher Mongré – unabhängig von der Relativitätstheorie. Anknüpfend an Poincarés Darstellung der früheren französischen Gedankenexperimente einer simultanen Vergrößerung oder Verkleinerung der räumlichen Dimensionen aller Körper betonte nun auch Schlick die grundlegende Relativität der räumlichen Messungen, um dann Poincarés Variante eines Transformationsprinzips vorzustellen, die Hausdorff bereits kannte:

> Zwei Welten, die durch eine völlig beliebige (aber stetige und eindeutige) Punkttransformation ineinander übergeführt werden können, sind hinsichtlich ihrer physikalischen Gegenständlichkeit miteinander identisch.[567]

Von hier ausgehend betonte Schlick, wie Hausdorff in seinem Vortrag, dass vor allem das Kriterium einer möglichst einfachen Beschreibung der physikalischen Vorgänge die ansonsten beliebige Wahl einer räumlichen Beschreibung der Erfahrungswelt einschränkte, dass Entsprechendes auch für die Zeit gesagt werden konnte, und dass mithin galt:

> Wirklich ist nur die Vereinigung, die Einheit von Raum, Zeit und Dingen; jedes für sich ist eine Abstraktion. Und bei einer Abstraktion muß man

[566] Schlicks Aufsatz erschien in erweiterter Fassung noch im selben Jahr in einem Separatdruck [Schlick 2017]. Im Folgenden wird aus dieser Fassung zitiert.

[567] [Schlick 1917], S. 13; zu Hausdorffs Kenntnis von Poincarés Transformationsprinzip vgl. Abschnitt 3.6.1.

> sich immer fragen, ob sie auch naturwissenschaftlichen Sinn hat, d. h. ob das durch die Abstraktion Getrennte auch tatsächlich voneinander unabhängig ist.[568]

Schlick schloss seine Schrift mit einer ausführlichen Diskussion der Beziehung zwischen Physik und Psychologie, die sowohl Motive enthielt, die Hausdorffs Ansichten zum „subjektiven Problem“ von Raum und Zeit verwandt waren, wie auch andere Elemente, in denen ihre Ansichten sich unterschieden.[569] Auch Schlick betrachtete die psychologisch zu erklärende Anschauung von Raum und Zeit als ein subjektives Phänomen, und anschließend an die Tradition von Berkeley bis Poincaré unterschied er ebenso viele anschauliche „Räume“, wie es Sinne gab; freilich betrachtete er diese wesentlich weniger individualistisch als der Schriftsteller Mongré, und sah – in deutlichem Kontrast zu Mongré – für die „psychologische Zeit“ *keine* wesentliche Pluralität der wahrgenommenen Zeit*ordnung*, wiewohl das „unmittelbare Erlebnis der Dauer, des Früher und Später [...] doch ein wechselndes anschauliches Moment“ ist, „das uns denselben objektiven Vorgang je nach Stimmung und Aufmerksamkeit bald lang, bald kurz erscheinen läßt, im Schlafe ganz verschwindet und je nach der Fülle des Erlebten ganz verschiedenen Charakter trägt“.[570] Den subjektiven Anschauungen von Raum und Zeit gegebüber stand der „objektive“ Begriff einer „Raum-Zeitmannigfaltigkeit“ der Physik, der in einer aktiven „begrifflichen Konstruktion“ theoretisch und empirisch erzeugt war.

Beide Seiten waren miteinander in einer wiederum pragmatischen Weise durch eine „eindeutige Zuordnung“ von zeitlichen und räumlichen Erlebnissen einerseits, und theoretischen „Hilfsbegriffen“ andererseits verbunden.[571] Schlick glaubte allerdings, dass diese Zuordnung mehr sein konnte als bloße konventionelle Pragmatik, dann nämlich, wenn nicht nur die Elemente unserer „Empfindungskomplexe“, wie er anknüpfend an Ernst Mach formulierte, den physikalisch grundlegendsten Tatsachen (in letzter Analyse: der Koinzidenz physikalischer Ereignisse) entsprächen, sondern wenn auch komplexere Begriffe wie die der Atome, Moleküle oder Kräfte den komplexeren Empfindungen in unserer Anschauung eindeutig zugeordnet werden konnten:

> Jede Theorie besteht aus einem Gefüge von Begriffen und Urteilen, und sie ist richtig oder wahr, wenn das System der Urteile die Welt der Tatsachen eindeutig bezeichnet.[572]

Es ist kein Wunder, dass Hausdorff sich nach der Lektüre dieser Abhandlung an Schlick wandte, als er die Gelegenheit dazu erhielt, und ihn auf seine eigenen früheren Schriften aufmerksam machte.

Den unmittelbaren Anlass hierfür bot eine Sendung, die Hausdorff im Februar 1919 von Schlick bekam, und die einen Sonderdruck von Schlicks kurz zuvor

[568] [Schlick 1917], S. 22.
[569] Dieser Teil der Schrift wurde in der separaten Publikation [Schlick 1917] ergänzt; er findet sich noch nicht in der Erstpublikation in *Die Naturwissenschaften*.
[570] Ebd., S. 54.
[571] Ebd., S. 56-58.
[572] Ebd., S. 61.

erschienenem Aufsatz „Erscheinung und Wesen“ enthielt.[573] Schlicks Sendung war ihrerseits veranlasst durch eine Aufforderung, die der Wiener Privatgelehrte Franz Selety an Schlick gerichtet hatte, während er mit ihm über den von Schlick in „Erscheinung und Wesen“ vertretenen philosophischen Standpunkt eines „Bewusstseinsmonismus“ korrespondierte und dabei auch auf Hausdorff verwiesen hatte. These des Schlickschen Aufsatzes war, dass die Vorstellung der Wirklichkeit aus der erlebten Wirklichkeit des Bewusstseins aufgebaut wurde. Selety hatte diese These in eigenen früheren Publikationen zu einer noch entschiedeneren, temporalisierten „Instantanmonadologie“ weitergeführt, die davon ausging, dass jeder individuell erlebte Bewusstseinsmoment seine eigene Wirklichkeit hatte und bildete, und alle anderen Vorstellungen (auch Zeit und Raum) daraus abzuleiten waren.[574] Wie ein erhaltener Brief Seletys an Schlick vom 5. Februar 1919 belegt, war Selety offenbar der Meinung, dass in Mongrés erkenntniskritischer Monographie eine zwar verwandte, aber doch ganz andere Auffassung vertreten wurde:

> Mit Professor Hausdorff hatte ich, gerade in letzter Zeit, die in Ihrer Abhandlung behandelte Frage brieflich erörtert. Professor Hausdorff steht auf dem von Ihnen bekämpften Standpunkt, dass das Bewusstsein nicht als eigentliche Realität zu bezeichnen ist und dass es ein Ding an sich gibt, das in einem ganz anderen und eigentlicheren Sinn real ist. Ich möchte Sie daher sehr bitten, Prof. Hausdorff, wenn möglich, einen Sonderdruck Ihrer Abhandlung zu übersenden [...].[575]

Die Passage zeigt, dass Selety den transzendenten Nihilismus Mongrés gründlich missverstanden hatte, und es fällt nicht schwer, sich die (leider nicht erhaltene) „briefliche Erörterung“ der beiden vorzustellen. In der raschen und höflichen Antwort, die Hausdorff noch im Februar 1919 an Schlick schrieb, suchte er das Missverständnis Seletys denn auch aufzuklären:

> In einem Briefe bezeichnete Herr S. den Bewusstseinsvorgang als „Ding an sich“ des Gehirnprocesses – diese extreme Ausdrucksweise schien mir das, was ich von Kant noch wusste, auf den Kopf zu stellen, und darüber gerieten wir ins Disputiren.[576]

Hausdorff fügte einige weitere Erläuterungen an, wie er sich (zu diesem Zeitpunkt) die Relation zwischen „Bewusstseinsvorgängen“ und „Dingen an sich“ formal zurechtgelegt hatte: demnach wurde der Begriff eines „Dinges an sich X“ durch Abstraktion aus den

> Bewusstseinsvorgänge[n] verschiedener Subjecte A, B, C, oder desselben Subjects A zu verschiedenen Zeiten, die eine gewisse Beziehung auf etwas Gemeinsames enthalten, nach dem Schema $AX, BX, CX, ...A'X, A''X, ...$

[573] Vgl. [Schlick 1919]. Der vermutlich beiliegende Begleitbrief Schlicks an Hausdorff ist leider nicht erhalten.
[574] Zu Selety vgl. [Jung 2005]; ferner die Erläuterungen in HGW, Band IB, S. 363-368 sowie HGW, Band IX, S. 581-590.
[575] Franz Selety an Moritz Schlick, 5. 2. 1919, Wiener Kreis Archiv, Inv. Nr. 118/Sel.-1; zitiert nach HGW, Band IX, S. 584.
[576] Felix Hausdorff an Moritz Schlick, 23. 2. 1919, in HGW, Band IX, S. 583.

gebildet.[577] Hausdorff schloss seinen Brief an Schlick mit der Bemerkung:

> Vor einiger Zeit las ich Ihre Arbeit „Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik“ und fand sie so gut, dass ich Sie für einen Physiker hielt.
>
> Es würde mich eminent interessieren, was Sie zu meinem philosophischen Buch (P. Mongré, Das Chaos in kosmischer Auslese) sagen, das ich freilich heute, nach 21 Jahren, anders und vor allem wesentlich kürzer schreiben würde.[578]

Schlick nahm Hausdorffs Anregung gerne zur Kenntnis. Ab der dritten, 1920 gedruckten Auflage seiner viel gelesenen Abhandlung fügte er seiner Diskussion der Relativität des Raumes folgende Anmerkung an:

> Leider habe ich erst nach Erscheinen der zweiten Auflage dieser Schrift das höchst scharfsinnige und faszinierende Buch kennengelernt: „Das Chaos in kosmischer Auslese“, ein erkenntniskritischer Versuch von Paul Mongré, Leipzig 1898. Das fünfte Kapitel dieses Werkes gibt eine sehr vollkommene Darstellung der oben im Text folgenden Erörterungen. Nicht nur die Gedanken *Poincarés*, sondern auch einige der oben hinzugefügten Ergänzungen sind dort bereits vorweggenommen.[579]

Hausdorff war über diese Anerkennung sehr erfreut, und er erkannte in dem in seiner frühen Entwicklung ebenfalls stark durch Nietzsche geprägten Schlick[580] offenbar einen Gleichgesinnten. Ein zweiter Brief an Schlick vom 17. Juli 1920 brachte auch seine Einschätzung der eigenen erkenntniskritischen Verdienste und der philosophischen Reaktion auf dieselben klar zum Ausdruck:

> [Endlich] aussprechen möchte ich meinen herzlichsten Dank für Ihre Dedication und insbesondere meine grosse Freude über die Anerkennung, die Sie in Ihrem Brief und in Ihrem Büchlein dem „Chaos in kosmischer Auslese“ zu Theil werden lassen. Da Sie selbst feststellen konnten, dass ich in dieser Beziehung durch die Fachphilosophen nicht verwöhnt worden bin, so werden Sie meine Freude über die späte, aber doch schliesslich spürbare Wirkung meines damaligen Versuchs ermessen können. Von einigen, aber mehr künstlerisch als wissenschaftlich philosophisch gerichteten Seelen habe ich ja schon gelegentlich Äusserungen, die einen starken Eindruck meines Buches bezeugten, erhalten; aber mit den Fachphilosophen ging es mir doch so, wie es mir einer unter ihnen (Joël in Basel) vorausgesagt hatte: diese Herren merken es nicht, wenn man sie in die Luft sprengt![581]

---

[577] Felix Hausdorff an Moritz Schlick, 23. 2. 1919, in HGW, Band IX, S. 583.

[578] Ebd.

[579] [Schlick 1920], S. 24.

[580] Zu Schlicks Beziehung zu Nietzsche vgl. vor allem dessen Vorlesungen zu Nietzsche und Schopenhauer, ediert in [Schlick 2013]. Wie aus dieser Edition hervorgeht, liegt auch im Nachlass Schlicks hierzu weiteres biographisches Material vor. Ein systematischer Vergleich der Wege von Hausdorff und Schlick von ihrer Rezeption Nietzsches zu einer kritischen Erkenntnislehre wäre ein sehr wünschenswerter Beitrag zur Geschichte der wissenschaftsnahen Philosophie des frühen zwanzigsten Jahrhunderts.

[581] Felix Hausdorff an Moritz Schlick, 17. 7. 1920, in HGW, Band IX, S. 587; zu Joël vgl. die dort S. 590 gegebenen Erläuterungen.

Dass Schlick fortan auf Hausdorffs frühere Arbeiten verwies, belegt unter anderem eine Passage, die er in der 1925 erschienenen zweiten Auflage dem Abschnitt „Subjektivität der Zeit“ seiner *Allgemeinen Erkenntnislehre* anfügte, dabei auch noch einmal auf Seletys Beitrag verweisend:

> Noch auf einen andern Gedankengang ist hier hinzuweisen, der wohl geeignet ist, die Subjektivität des Zeitlichen im erläuterten Sinne besonders anschaulich zu machen, und den wir scharfsinnig entwickelt finden bei P. Mongré (Das Chaos in kosmischerAuslese, Leipzig 1898) und bei Franz Selety (Die wirklichen Tatsachen der reinen Erfahrung, eine Kritik der Zeit. Zeitschr. f. Philosophie und philos. Kritik Bd. 152, 1913). Denken wir uns nämlich den Strom unserer Bewußtseinsinhalte in aufeinanderfolgende Abschnitte zerlegt und die einzelnen Abschnitte in beliebiger Weise miteinander vertauscht, so daß die Reihenfolge unserer Erlebnisse gänzlich durcheinander geworfen wird, und fragen wir uns, welchen Unterschied diese Umordnung für unser Erleben machen würde, so müssen wir antworten: gar keinen![582]

Der beschriebene Kontakt mit Moritz Schlick zeigt nicht nur, dass Hausdorff weiterhin einen berechtigten Stolz auf seinen früheren Beitrag zur Erkenntniskritik besaß, sondern auch, dass die von ihm verteidigte, formalistisch besonnene Variante einer empiristischen Erkenntnislehre nun einen späten Eingang in die breitere wissenschaftsphilosophische Debatte der Zeit fand.[583]

5.3 Mathematische Klärungen

Wie die ersten fünf Bände dieser Edition umfassend dokumentieren, wandte sich Hausdorff in den Jahren nach 1900 mehr und mehr der Weiterführung und Ausarbeitung der von Georg Cantor begründeten Theorie unendlicher Mengen zu.[584] Zunächst geschah dies in Vorlesungen. Schon Hausdorffs erste Vorlesung über *Mengenlehre*, gehalten in Leipzig im Sommersemester 1901, zeigt nicht nur, dass Hausdorff direkt durch Cantors frühere Arbeiten angeregt war, sondern auch, dass er die Beschäftigung mit der Mengenlehre verbunden sah mit jenen philosophischen Fragen über die Natur und die Grundlagen der Mathematik und ihrer naturwissenschaftlichen Rolle, die er in seinen erkenntniskritischen Schriften gestellt hatte.[585] Insbesondere nahm Hausdorff bereits im

[582] [Schlick 2009], S. 569-570. Bereits in seinem Aufsatz „Die Grenze der naturwissenschaftlichen und philosophischen Begriffsbildung“ hatte Schlick in einer Anmerkung anerkennend auf eine von Hausdorff verfasste Besprechung von Wilhelm Ostwalds V̂orlesungen über Naturphilosophie verwiesen, vgl. [Schlick 1910], S. 127.

[583] Vgl. dazu auch unten, Abschnitt 6.2.

[584] Zur historischen Einordnung von Hausdorffs mengentheoratischen Arbeiten vgl. insbesondere Walter Purkerts Einführung zu HGW, Band II, S. 1-89.

[585] Vgl. die Edition des Manuskriptes dieser Vorlesung in HGW, Band IA, S. 409-451. Cantor selbst hatte seine Theorie unendlicher Mengen bekanntlich ebenso in einen philosophischen Horizont gestellt, der sich freilich deutlich von dem Hausdorffs unterschied; vgl. zu Cantor [Purkert/Ilgauds 1987] sowie zum Vergleich mit Hausdorff Purkerts Bemerkungen in der historischen Einführung zu HGW, Band II, S. 7.

Kontext der Diskussion der Mächtigkeit unendlicher Mengen auch die Frage nach den mengentheoretischen Eigenschaften von ein- und mehrdimensionalen Punktkontinua auf und behandelte die von Hilbert und Peano gegebenen Beispiele eineindeutiger, aber nicht stetiger Abbildungen zwischen ein- und mehrdimensionalen Punktkontinua sowie von stetigen, flächenfüllenden Kurven. Als zweites großes Kapitel der Vorlesung wählte Hausdorff die Untersuchung (einfach) geordneter Mengen. Im dritten Kapitel der Vorlesung sprach er „Über Punktmengen". Er stellte diesem Teil seiner Vorlesung eine Bemerkung voran, die einen zentralen Begriff seiner späteren Beiträge zur Mengenlehre einführte:

> Während im Ordnungstypus nur die Lage der Elemente *gegen einander* in Frage kommt, wird jetzt auch ihre Lage gegen die Elemente der *Umgebung* in Betracht gezogen.[586]

Diese Bemerkung, die in der Vorlesung durch eine wiederum an Cantors Arbeiten anschließende Diskussion von Häufungspunkten, isolierten Punkten, perfekten Mengen u.a. ausgeführt wurde, verweist auf eine Zweiteilung, die in Hausdorffs mathematischer Arbeit immer grundlegender werden sollte, und die schließlich in den *Grundzügen der Mengenlehre* umfassend ausgeführt wurde: zwischen der Untersuchung geordneter Mengen auf der einen Seite und der Theorie der topologischen Räume auf der anderen. Obwohl Hausdorff diesen Zusammenhang selbst nicht ausdrücklich hervorhob, können beide Zweige doch auch verstanden werden als Versuche einer mathematischen Klärung der allgemeinsten möglichen Formen einer „Zeitsuccession" bzw. einer „Raumstructur", wie Hausdorff in *Das Chaos in kosmischer Auslese* formuliert hatte.[587] Daher kann in der Anlage seines mengentheoretischen Hauptwerkes implizit auch ein Beitrag zu seiner früheren erkenntniskritischen Reflexion gesehen werden, sowohl im Hinblick auf die Kritik der Zeit (durch eine Erkundung der verschiedenen Möglichkeiten, geordnete Mengen zu bilden) wie auch im Hinblick auf die Kritik des Raumes (durch eine Erkundung der verschiedenen Möglichkeiten, topologische Räume zu konstruieren)

Trotz und nach Hausdorffs Rezeption der Relativitätstheorie kehrte hier die frühere begriffliche Trennung zwischen einer Untersuchung der Möglichkeiten der Zeitfolge einerseits, der Untersuchung der Möglichkeiten von Raumstrukturen andererseits, wieder. In der relativistischen Physik besaß das, wie Hausdorff selbst betonte, wenig Sinn; in der mathematischen, formal sehr viel radikaleren Theorie geordneter Mengen und topologischer Räume hingegen schon.

5.3.1 Ordnungsstrukturen als Formen der Sukzession

Wie bereits erwähnt, erschienen die ersten umfangreichen mengentheoretischen Arbeiten Hausdorffs ab dem Jahr 1906. Sie mündeten in einer längeren Arbeit,

[586] NL Hausdorff, Fasz. 12, Blatt 53; HGW, Band IA, S. 442.

[587] Vgl. oben, Abschnitt 3.2. Die Möglichkeit dieser Lesart hat Erhard Scholz bereits in einer frühen Phase der Vorbereitung dieser Edition hervorgehoben, vgl. [Scholz 1996]. Die folgenden knappen Bemerkungen von Abschnitt 5.3 stützen sich stark auf diesen Beitrag.

die 1908 in den *Mathematischen Annalen* gedruckt wurde, und die bereits ein wichtiges Stichwort des Titels des späteren Hauptwerks vorwegnahm: „Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen.“[588] Etliche Motive von Mongrés früherer Diskussion über mögliche Zeitordnungen finden sich hier schon in der Anlage seines begrifflichen Gerüsts wieder, verbunden mit Cantors einschlägigen Definitionen und Fragestellungen. Zu seinen ersten Grundbegriffen wählte Hausdorff die verschiedenen Formen von *Intervallen* linear geordneter Mengen (Anfangs-, Mittel- und Endintervallen), wobei ins Auge fällt, dass er recht konsequent eine eher temporale als räumliche Sprechweise verwendete, um die Ordnungsrelation zu beschreiben: Elemente oder Mengen „gingen einander voran“ oder „folgten aufeinander“, sie wurden nicht als „größer“ oder „kleiner“ bezeichnet. Dies wiederholte sich in der Klassifikation der Formen von Zerlegungen geordneter Mengen (d.h. der Zerlegungen einer geordneten Menge M in zwei Teilmengen A und B, wobei jedes Element von A jedem Element von B vorangeht) als„Sprünge“, „Schnitte“ und „Lücken“, je nachdem ob „(α) A ein letztes, B ein erstes“, oder „(β) A ein letztes, B kein erstes oder A kein letztes, B ein erstes“, oder „(γ) A kein letztes, B kein erstes“ Element hatte. Und ebenso wie seine frühere Diskussion der (nicht zuletzt durch unser Zeiterleben nahegelegten) Stetigkeit der Zeit in *Das Chaos in kosmischer Auslese* sowie in seiner Vorlesung *Zeit und Raum*[589] führte nun auch seine systematische Untersuchung gleich anfangs Konzepte „dichter“ und „stetiger“ geordneter Mengen ein: „Eine Menge ohne Paare konsekutiver Elemente heißt *überall dicht* oder kürzer *dicht*.“ Und er notierte:

> Eine dichte Menge ist frei von Sprüngen. Eine von Sprüngen und Lücken freie Menge, oder eine lückenlose dichte Menge, heißt stetig.[590]

Es ist hier nicht erforderlich, die bedeutenden, bereits weit über Cantor hinausgehenden technischen Leistungen von Hausdorffs frühen Untersuchungen geordneter Mengen im Detail zu verfolgen. Wichtig ist dagegen das in der Einleitung zu [Hausdorff 1908] beschriebene allgemeine Motiv dieser Untersuchungen: die vollständige Klassifikation aller denkbaren Typen geordneter Mengen (d.h., wie wir heute sagen würden, aller möglichen Formen von ordnungsisomorphen geordneten Mengen). Freilich ließ dieses Ziel sich nicht ohne Weiteres erreichen:

> Das vorschwebende Ideal war etwa eine Beherrschung der Typenwelt in dem Sinne, daß die komplexen Gebilde durch erzeugende Operationen aus elementaren aufgebaut erscheinen sollten; indessen zwingen gewisse Schwierigkeiten, namentlich ungelöste Mächtigkeitsprobleme, noch zur

[588] [Hausdorff 1908]; HGW, Band IA, S. 213-283. Viele der hier eingeführten Begriffe waren bereits in den vorangehenden ordnungstheoretischen Arbeiten Hausdorffs aufgetaucht; ich verzichte an dieser Stelle auf eine genauere Besprechung der Entwicklung der Hausdorffschen Überlegungen, vgl. dazu [Scholz 1996] sowie den editorischen Apparat von HGW, Band IA.

[589] Vgl. Abschnitte 3.3 und 4.3.2.

[590] Vgl., auch für die Zitate des vorangehenden Abschnitts, [Hausdorff 1908], §1; HGW, Band IA, S. 217-219.

> Resignation. Das Baumaterial zwar kann nicht zweifelhaft sein: es sind die wohlgeordneten Mengen und ihre Inversen, deren Mächtigkeit freilich nicht mehr auf Alefs mit endlichem Index eingeschränkt werden darf, und insbesondere sind die *regulären Anfangszahlen* mit ihren Inversen als die letzten Bausteine und Uratome der Typenwelt anzusehen. Aber die aufbauenden Operationen sind nicht so einfach und naheliegend, wie man wünschen möchte.[591]

In der Tat ging die Abhandlung denn auch über einige allgemeine Bemerkungen über den „Aufbau beliebiger Typen" in § 11 nicht wesentlich hinaus. Schon in früheren Arbeiten hatte Hausdorff etliche weitere Werkzeuge diskutiert, mit deren Hilfe er im „Aufbau beliebiger Typen" weiter gehen wollte, so 1904 das der (bereits von Cantor eingeführten) Potenzierung von Ordnungstypen[592] und schon 1901 das Konzept der „gestuften Mengen":

> Definition. Eine Menge heisst gestuft, wenn keiner ihrer Abschnitte einem andern ähnlich ist. Der Ordnungstypus einer gestuften Menge heisst ein gestufter Typus.[593]

Vor allem dieses Konzept unterstreicht eine für Hausdorff immer wieder charakteristische Haltung, die auf die Konstruktion von möglichst radikal von den gewohnten Elementarformen der Reihe der natürlichen Zahlen oder des Linearkontinuums abweichenden, unintuitiven Ordnungen abzielte, die also den Spielraum der denkbaren, möglichen Formen der Ordnung möglichst stark erweitern wollte.[594]

Das Interesse an einer vollständigen Klassifikation aller Formen wird weiter unterstrichen durch die sicherlich bewusste Anleihe von Hausdorffs mathematischer Sprache an den Klassifikationen der traditionellen Naturgeschichte. So sprach er bereits 1906 von den „vier Gruppen, neun Gattungen und fünfzig Spezies" von Ordnungstypen, und gleichsam im Stil einer Naturgeschichte der geordneten Mengen führte er seine vorläufige Klassifikation in Tabellen zusammen.[595] Dass ihm bis auf Weiteres nicht gelang, sein übergeordnetes Ziel zu erreichen, tut seiner Erkenntnishaltung keinen Abbruch. Stellt man die Frage, warum er dieses Ziel verfolgte, bietet sich als Antwort neben den naheliegenden mathematischen Interessen (bis hin zu einer Klärung der wichtigen offenen Fragen in den Grundlagen der Cantorschen Mengenlehre) auch die Vermutung an, dass erst eine vollständige Übersicht über den gesamten Spielraum der Typen geordneter Mengen jenen Vorrat an Formen hätte bereitstellen können, welchen eine radikale und konsequente Anwendung seines besonnenen Empirismus in Fragen der formalen Analyse empirischer Ordnungen erfordert hätte. Dies gilt auch für die Anwendung auf die („subjektive" und „objektive") Zeit und

591 [Hausdorff 1908], S. 435 f.; HGW, Band IA, S. 213 f.
592 Dies ist Thema von [Hausdorff 1904] und [Hausdorff 1906b], beide in HGW, Band IA.
593 [Hausdorff 1901b], S. 462; HGW, Band IA, S. 7, im Original kursiv.
594 [Scholz 1996] spricht hier treffend von den „logischen Ordnungen im Chaos"; hier hinsichtlich des für die Analyse der Zeit erforderlichen Aspekts der Ordnung.
595 [Hausdorff 1906b], § 2; HGW, Band IA, S. 152-156. Die Überlegungen zu den „Spezies und Geschlechtern" werden fortgeführt in [Hausdorff 1908], § 18; HGW, Band IA, S. 252-253.

die denkbaren Typen von Zeitfolgen, wie sie von Kant über Baer, Liebmann, Clifford und Nietzsche bis hin zu Mongré diskutiert wurden.

5.3.2 Der Begriff des topologischen Raums

Das im letzten Abschnitt angedeutete Vorhaben einer Übersicht über alle denkbaren Typen geordneter (und nun auch partiell geordneter) Mengen fand seine reife Darstellung schließlich in den einschlägigen Kapiteln von Hausdorffs mengentheoretischem Hauptwerk. Ganz entsprechend kann (und sollte) das Konzept und die Theorie der topologischen Räume, die Hausdorff schließlich 1914 in den letzten vier Kapiteln seiner *Grundzüge der Mengenlehre* vorstellte, als Versuch gedeutet werden, eine möglichst umfassende Übersicht über alle widerspruchsfrei denkbaren Formen einer „Raumstructur“ zu gewinnen.

Der Bezug auf die früheren Überlegungen Mongrés ist dabei noch leichter nachzuweisen als im Fall der Zeit. Wie wir in Abschnitt 4.3 gesehen haben, hatte Mongré am Schluss des Kapitels „Vom Raume“ in *Das Chaos in kosmischer Auslese* ausdrücklich betont, dass in der „Continuität“ ein „schwieriges Problem“ lag, für die Physik ebenso wie für die Mathematik, „über das die Discussion noch nicht einmal recht angefangen“ hatte, und er hatte sich schon damals für die von Cantor und anderen gegebenen Beispiele von ungewöhnlichen Punktmengen interessiert, die von den anschaulich nur scheinbar klar umrissenen Punktkontinua verschiedener Dimension abwichen.

Eine axiomatische Fassung des Begriffs der Umgebung, auf dessen Bedeutung er bereits in seiner Vorlesung *Mengenlehre* von 1901 hingewiesen hatte, und eine darauf gegründete axiomatische Definition von topologischen Räumen schien ihm hierfür nun eine geeignete Handhabe zu bieten. Hausdorffs Einführung und erste Erkundung topologischer Räume zählt zu seinen bedeutendsten mathematischen Leistungen. Wiederum braucht an dieser Stelle keine ausführliche technische und historische Einordnung seiner darauf bezöglichen Forschungen und Ergebnisse erfolgen.[596] Es genügt, hier die epistemologische Relevanz derselben kurz zu umreißen.

Auch wenn heute die mengentheoretische Topologie allgemeiner ansetzt und feiner differenziert, so ist doch klar, dass Hausdorff am Vorabend des Ersten Weltkriegs die formale Fassung von drei Begriffen als grundlegend für eine mögliche formale Analyse aller denkbaren Formen von Stetigkeit in raumartigen Gebilden ansah: des Begriffs der *Entfernung*, des (zweiteiligen) Begriffs der *konvergenten Punktfolge und ihres Limes*, und des Begriffs der *Umgebung*, wie er am Beginn des siebten Kapitels „Punktmengen in allgemeinen Räumen“ der *Grundzüge* erläuterte. Er hatte sich zwischen diesen alternativen Zugängen entschieden:

> Wir ziehen aus verschiedenen Gründen vor, die grundlegenden Betrachtungen dieses Kapitels auf die *Umgebungen* zu stützen und die beiden

[596] Interessierte Leserinnen und Leser seien wiederum auf die anderen Bände der Edition verwiesen. Neben den *Grundzügen der Mengenlehre*, die in HGW, Band II ediert und kommentiert sind, sei insbesondere auf den Beitrag „Zum Begriff des topologischen Raumes“ in HGW, Band II, S. 675-744 sowie auf das umfangreiche Material in HGW, Band III verwiesen.

> andern Begriffe erst später zur Mitwirkung heranzuziehen; um aber dem Leser sogleich ein konkretes Bild zu erwecken, beginnen wir mit den speziellen Umgebungen, die durch Entfernungen definiert sind.[597]

Damit griff Hausdorff das erkenntnistheoretische Motiv der „Bilder“ wieder auf, das ihm schon in seiner zweiten Phase der Auseinandersetzung mit dem Raumproblem, namentlich in seinen Diskussionen der nichteuklidischen Geometrie am Herzen gelegen hatte.[598] Die auf das Zitat unmittelbar folgenden Absätze der *Grundzüge* machen das noch deutlicher. Hier griff Hausdorff noch einmal das Motiv der „unendlich vielen Weisen“ der Selbstabbildung („Koordinatentransformationen“) von n-dimensionalen euklidischen Räumen auf, um seine Leser darauf vorzubereiten, dass die wesentlichen topologischen Eigenschaften selbst der gewöhnlichen euklidischen Räume nicht an deren besonderer anschaulicher Gestalt lagen, sondern an tieferliegenden strukturellen Eigenschaften. Schon der von den euklidischen Räumen stark abstrahierende Begriff des metrischen Raumes – definiert durch drei „Entfernungsaxiome“ – erlaubte eine der Anschauung ferner stehende Definition von Stetigkeitseigenschaften. Aber Hausdorff nutzte, konsequent auf eine möglichst allgemeine Fassung zielend, das noch immer anschauliche Bild der sphärischen Umgebungen eines metrischen Raumes, um den Leser schließlich auf die axiomatische Fassung seines Begriffes eines topologischen Raume vorzubereiten. Die Struktur seiner Definition zeigt, wie allgemein er nun ansetzte:

> Unter einem topologischen Raum verstehen wir eine Menge E, worin den Elementen (Punkten) x gewisse Teilmengen U_x zugeordnet sind, die wir Umgebungen von x nennen, und zwar nach Maßgabe der folgenden *Umgebungsaxiome:*
>
> (A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x.
>
> (B) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung W_x, die Teilmenge von beiden ist [...].
>
> (C) Liegt der Punkt y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist [...].
>
> (D) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt [...].[599]

Eine an das Wort „topologischen“ angefügte Fußnote macht klar, dass Hausdorff diesen Ansatz einer allgemeinen Untersuchung der Stetigkeitseigenschaften von Mengen als noch voraussetzungsärmer ansah als den auf der Messung von Entfernungen aufgebauten:

[597] [Hausdorff 1914a], S. 211; HGW, Band II, S. 311.
[598] Vgl. Abschnitte 4.2 und 4.3.
[599] Ebd., S. 213; HGW, Band II, S. 313. Symbolisierungen der Aussagen (B)-(D), die heute z.T. nicht mehr gebräuchlich sind, wurden weggelassen. Eine Diskussion des Wegs, auf dem Hausdorff zur genauen Fassung seiner Umgebungsaxiome gelangte, sowie des mathematikhistorischen Kontexts und verwandter Bemühungen von David Hilbert und Hermann Weyl findet sich in HGW, Band II, S. 708-718.

> Der Ausdruck ist in einem verwandten Sinne bereits üblich; wir wollen damit andeuten, dass es sich um Dinge handelt, die ohne Maß und Zahl ausdrückbar sind.[600]

Die Vielfalt aller denkbaren Formen topologischer Räume war womöglich noch schwerer zu überblicken als als die Typen geordneter Mengen. Neben den vertrauten Beispielen von Punktmengen in euklidischen Räumen wurden nun auch gänzlich andere Mengen mit Umgebungssystemen denkbar, die sich gemäß obiger Definition als topologische Räume auffassen ließen, von beliebiger, endlicher oder transfiniter Mächtigkeit. Dennoch lassen sich Hausdorffs Definitionen der weiteren im siebten Kapitel der *Grundzüge* eingeführten Begriffe wiederum als Werkzeuge verstehen, mit deren Hilfe die Konstruktion und Untersuchung von Mengen mit topologischen Eigenschaften möglich wurde.

Damit stellte Hausdorff zugleich klar, dass der mathematische Raumbegriff nicht nur im *geometrischen* Sinn Alternativen besaß, wie dies im Lauf des 19. Jahrhunderts klar geworden war. Bereits Maurice Frechet, Frygies (Friedrich) Riesz und andere hatten den Blick auf alternative metrische Räume gelenkt[601]; Hausdorff führte nun vor Augen, dass auch in von den gewöhnlichen Punktmengen der euklidischen Räume radikal abweichende Mengen mit Umgebungsstrukturen denkbar waren, in welchen sich doch über Nachbarschaft, Dichtigkeit, Stetigkeit, Konvergenz und verwandte Begriffe reden ließ. Aus dieser Perspektive zeigt sich, wie weit Hausdorffs Exploration des enormen *Spielraums* der Mathematisierung von räumlichen Strukturen jene Fragen überschritt, um welche die Debatten über die nicht-euklidische Geometrie früher gekreist hatten, und die auch in den zahllosen philosophischen Versuchen zentral gewesen waren, Kants transzendentale Ästhetik davor in Schutz zu nehmen, wenn nicht gar eine a priori gegebene Raumstruktur zu beweisen. Wieder einmal, so könnten wir sagen, trug Hausdorff mit seiner Einführung des allgemeinen Begriffs topologischer Räume dazu bei, fest sitzende philosophische Überzeugungen durch die Bereitstellung eines Reservoirs an mathematischen Formen „in die Luft zu sprengen“, auf eine noch konsequentere und radikalere Weise, als dies in der ersten und zweiten Phase seiner Beschäftigung mit dem Raumproblem geschehen war.

Bemerkenswerterweise ließ Hausdorff diesem sehr allgemeinen Ansatz in den folgenden Kapiteln der *Grundzüge* wiederum speziellere Überlegungen folgen, zunächst zu metrischen Räumen (die das Hauptthema des achten Kapitels bildeten), dann zur Kurventheorie und stetigen Funktionen (neuntes Kapitel) und schließlich zum „Inhalt von Punktmengen“, wie das zehnte und letzte Kapitel

---

[600] Ebd.

[601] Vgl. insbesondere Frechets Dissertation [Frechet 1906] und Riesz' ebenfalls 1906 auf ungarisch und 1907 auf deutsch publizierte Abhandlung „Die Genesis des Raumbegriffs“[Riesz 1907]. Während Frechets Interessen vor allem der (Funktional-)Analysis galten, suchte Riesz auch die philosophische Diskussion des Raumbegriffs voranzutreiben; vgl. dazu [Kreyszig 1990] und [Rodriguez 2006].

überschrieben war, das u.a. die Lebesguesche Integrationstheorie vorstellte.[602] Man darf darin wohl auch wieder die Orientierung auf mögliche *Anwendungen* seiner allgemeinen Topologie auf Bereiche der empirischen Wissenschaft sehen, mithin einen weiteren Beitrag zur Entfaltung seines besonnenen Empirismus: Fragen der *Messung* (von entfernungsartigen Relationen) waren dafür sicherlich ebenso grundlegend wie Fragen des *Maßes* (von volumenartigen Eigenschaften).

5.3.3 Maß und Dimension

Das zuletzt angesprochene Thema – eine allgemeine formale Analyse volumenartiger Eigenschaften – war nicht nur ein zu dieser Zeit hoch dynamisches Teilgebiet der modernen Analysis, sondern es berührte, wie Hausdorff schon früher erkannt hatte, auch tiefliegende Paradoxien im Aufbau einer Mathematik räumlicher Messung und eine erkenntnistheoretische Anomalie, auf welche Hausdorff in den früheren Phasen seiner Auseinandersetzung mit dem Raumproblem gestoßen war, und die den Begriff der Raumdimensionen betraf.

Schon während der Arbeit an den *Grundzügen* war Hausdorff auf das nach ihm benannte Paradoxon über den Inhalt von Punktmengen gestoßen, das zeigte, dass ein sinnvoller Begriff des Rauminhalts nicht für alle beschränkten Teilmengen eines euklidischen Raumes gebildet werden konnte. Sofern nur verlangt wurde, (i) dass der Einheitswürfel den Inhalt 1 besaß, (ii) dass geometrisch kongruente Mengen denselben Inhalt besaßen, und (iii) dass dieser Inhalt für die disjunkte Vereinigung von zwei Mengen additiv war, ließ sich für die Einheitskugel K im dreidimensionalen euklidischen Raum zeigen,

> daß (von einer abzählbaren Menge abgesehen) die Kugel K in drei Mengen A, B, C gespalten werden kann derart, daß A, B, C und $B + C$ paarweise kongruent sind.[603]

Hausdorffs Konstruktion dieser paradoxen Zerlegung benutzte ein rekursives Verfahren in abzählbar vielen Schritten mit gruppentheoretischen Mitteln, also ein Verfahren, dessen Methoden zwar transfinit, aber kaum umstritten waren. Sein Resultat unterstrich die Notwendigkeit der bereits von Henri Lebesgue und anderen vollzogenen Einschränkung der Maß- und Integrationstheorie auf Systeme von in einem geeigneten Sinn meßbaren Teilmengen eines Raumes, einen Zugang also, der in seiner Anlage dem Vorgehen seiner Definition topologischer Räume nicht unverwandt war: In beiden Bereichen wurde ein Begriff, der eine strukturell interessante Eigenschaft einer Menge E möglichst allgemein definieren sollte, durch die Auszeichnung eines geeigneten Systems von Teilmengen von E gewonnen.[604]

[602] Vgl. dazu insbesondere den Beitrag „Measure and Integration Theory“ von S.D. Chatterji in HGW, Band II, S. 788-800.
[603] [Hausdorff 1914b], S. 430; HGW, Band IV, S. 7.
[604] Zur weiteren mathematischen und historischen Kommentierung von Hausdorffs Paradoxon vgl. den Kommentar von S. D. Chatterji in HGW, Band IV, S. 11-18.

Angesichts der zu dieser Zeit längst bestehenden Bereitschaft Hausdorffs, sich auf eine Erkundung der formalen Möglichkeiten auch entschieden unanschaulicher räumlicher Verhältnisse einzulassen, verwundert es nicht, dass er auf dieses grundlegende Paradoxon im Aufbau der Maßtheorie stieß, welches er auch ans Ende seiner *Grundzüge* stellte. Ohnehin fürchtete er sich anders als etliche zu restriktiveren Haltungen in den Grundlagen der Mathematik neigende Mathematiker der Zeit nicht vor Paradoxien.[605] Dabei ist freilich zu bedenken, dass die von ihm konstruierte Zerlegung der Einheitskugel in keiner Weise mit einer logischen Paradoxie verbunden war. Sie widersprach lediglich – allerdings sehr drastisch – unseren gewöhnlichen anschaulichen Erwartungen. Wieder war es also die Beziehung der formalen Mathematik auf Gegenstände der (von Hausdorff stets nur individuell gedachten) Anschauung, oder auch der Erfahrung, die problematisch wurde, nicht die formale Mathematik selbst. Umgekehrt diente das Paradoxon wiederum einem besseren Verständnis des „Spielraums des Denkens", der für die Bildung von Inhaltsbegriffen in mathematischen Räumen bestand, um noch einmal die Terminologie von Hausdorffs Antrittsvorlesung *Das Raumproblem* aufzugreifen.

Im Jahr 1919 veröffentlichte Hausdorff schließlich einen Aufsatz, der einen weiteren grundlegenden Begriff der Raumlehre betraf, für welchen bis zu diesem Zeitpunkt nur ein sehr begrenzter Spielraum des Denkens zu bestehen schien, jenen der Dimension. Ja, hier schien bereits der enge „Spielraum der Anschauung" eine mathematische Beschreibung des Raumes unserer Erfahrung festzulegen; Mongré und Hausorff hatten mehrmals notiert, dass es ein „fait accompli" unserer Anschauung sei, dass die Zahl der Dimensionen des (empirischen) Raums drei (bzw. der Raumzeit vier) war.[606] Bestand hier also ausnahmsweise kein „Unbestimmtheits-Spielraum", wie in so vielen anderen naturwissenschaftlich relevanten formal-mathematischen Begriffsbildungen? Wäre also in diesem Fall bereits ein „unbesonnener", sich dieser Unbestimmtheit nicht bewusster Empirismus der Dimension möglich?

Diese erkenntniskritische Anomalie rückte durch Hausdorffs Aufsatz „Dimension und äußeres Maß" in ein ganz neues Licht. Aufbauend auf maßtheoretischen Konzepten von Constantin Carathéodory gab Hausdorff nun eine neue Definition für

> das p-dimensionale Maß einer Punktmenge im q-dimensionalen Raum [...], die sich auf nicht ganzzahlige Werte von p ausdehnen und Mengen *gebrochener Dimension* als möglich erscheinen läßt, ja sogar solche, deren Dimension die Skala der positiven Zahlen zu einer verfeinerten, etwa logarithmischen Skala ausfüllen.[607]

Auch hier ist für die vorliegenden Zwecke nicht erforderlich, die faszinierende Weise näher zu beschreiben, in der es Hausdorff gelang, dieses Anliegen technisch zu erreichen, und die entschieden einer Mathematik fraktaler Mengen

[605]Vgl. dazu auch die Bemerkungen Egbert Brieskorns in HGW, Band IB, S. 359 f.
[606]Vgl. oben, Abschnitt 4.3.1.
[607][Hausdorff 1919a], S. 157; HGW, Band IV, S. 21.

zuarbeitete.[608] Sie zeigt noch einmal, welche Kraft die von Hausdorff inzwischen entwickelten Verfahren der Konstruktion ungewöhnlicher Punktmengen besaßen, und zugleich, auf welche Schwierigkeiten sie nach wie vor stießen:

> Nicht so ungezwungen wie unser Dimensionsbegriff ist freilich der Nachweis, daß es Mengen gibt, die von genau vorgeschriebener Dimension sind, d.h. ein entsprechendes Maß besitzen, das weder Null noch unendlich ist; wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf die einfachsten Beispiele, nämlich gewisse lineare nirgendsdichte perfekte Mengen (auf welche, für abnormes Verhalten aller Art typische Mengengattung hier ein neues Licht fällt) und die hieraus durch Multiplikation entstehenden ebenen und räumlichen Mengen.[609]

Schon diese „einfachsten Beispiele“ zeigen noch einmal deutlich die bereits zwanzig Jahre zuvor in Mongrés Schriften dokumentierte Lust an der imaginativen Erkundung von „abnormem Verhalten aller Art“; schon in diesen früheren Texten hatte er immer wieder auf die Möglichkeit hingewiesen, dass die zur Beschreibung des Raumes herangezogene Punktmenge nicht unbedingt $\mathbb{R}^3$ sein musste.[610]

Ohne dass Hausdorff dies ausgesprochen hätte, war damit die erkenntniskritische Anomalie des Dimensionsbegriffs beseitigt. Wodurch konnte ausgeschlossen werden, dass der „subjektive Raum“ unserer individuellen Anschauung oder der „objektive Raum“ der messenden Physik ein Raum gebrochener Dimension war? Auch hier war nun ein Unbestimmtheits-Spielraum eröffnet. Entsprechend zu den anderen Feldern, in welchen ein besonnener Empirismus erforderlich war, konnte dieser Spielraum nur durch konventionelle Wahl bzw. durch eine die Einfachheit der entstehenden Beschreibung als theoriepragmatisch leitendes Kriterium wählende Entscheidung geschlossen werden.

---

[608] Hausdorffs Aufsatz ist wahrscheinlich der heute am meisten zitierte mathematische Text seines Autors. Zur ausführlichen Einordnung desselben in den mathematikhistorischen Kontext vgl. den Kommentar zu [Hausdorff 1919a] von S.D. Chatterji in HGW, Band IV, S. 44-54, sowie die ausführliche Darstellung von Walter Purkert in HGW, Band IB, S. 801-832.

[609] [Hausdorff 1919a], S. 157; HGW, Band IV, S. 21.

[610] Vgl. Abschnitte 3.4 und 4.3.1. Auch auf diese Verbindung zwischen Hausdorffs frühen philosophischen und späteren mathematischen Arbeiten hat bereits [Scholz 1996] hingewiesen.

6. Spielräume des Denkens: Hausdorffs Argumente im Kontext

Blicken wir auf die drei dargestellten Phasen von Hausdorffs Beschäftigung mit Fragen der Zeit und des Raumes zurück, so wird deutlich, dass in seiner durch alle Phasen festgehaltenen, wenn auch nicht in gleicher Weise artikulierten erkenntniskritischen Haltung eine große Kohärenz liegt. Das Programm eines „besonnenen Empirismus“, das er in seiner Leipziger Antrittsvorlesung von 1903 für den Raum vorgestellt hatte, bei jener Gelegenheit, die auch den Schriftsteller Mongré und den Mathematiker Hausdorff öffentlich miteinander verband, erfuhr seine weitere Entfaltung nicht nur in der unmittelbar danach entstandenen Vorlesung über *Zeit und Raum*, sondern es lässt sich auch in jenen mathematischen Klärungen wiederfinden, die Hausdorff in seiner reifen mathematischen Arbeit für die Untersuchung von geordneten Mengen, von topologischen Räumen sowie von Maß und Dimension bereitstellte.

Wie wir gesehen haben, war sich Hausdorff dabei bewusst, dass die eigenen Überlegungen im Kontext verwandter Bemühungen der zeitgenössischen Mathematik und Physik ebenso wie der wissenschaftsnahen Philosophie standen, und gern ergriff er die Gelegenheit, dabei auch den Schriftsteller Mongré noch einmal ins Gespräch zu bringen. Drei dieser Kontexte seien abschließend kurz angedeutet: die Entwicklung einer konventionalistischen Philosophie der Geometrie und Mechanik, die Philosophie der relativistischen Raumzeit, und die Entwicklung des logischen Empirismus. Diese Andeutungen sind auch von der Hoffnung angeleitet, dass künftige Forschungen zur Geschichte und Philosophie der Wissenschaften des ausgehenden neunzehnten und beginnenden 20. Jahrunderts Hausdorffs Stellung und den epistemologischen Wert seiner Überlegungen weiter beleuchten.

6.1 Konventionalismus in der Philosophie von Geometrie und Mechanik

Hausdorff selbst bemerkte nach der Wende zum 20. Jahrhundert, dass sich etliche der Grundgedanken seiner eigenen Überlegungen zur Erkenntniskritik von Zeit und Raum auch in den Schriften anderer fanden, in der Regel zwar in verwandter, aber doch verschiedener Form. Angesichts dessen, dass er ebenso auf eine Reihe früherer Autoren zwischen Naturwissenschaft und Philosophie zurückgriff wie andere auch, und dass er ebenso wie diese teilhatte an einer das späte 19. Jahrhundert prägenden Bewegung des Nachdenkens über die epistemologischen Grundlagen der sich rasch wandelnden Naturwissenschaften, ist dies nicht überraschend.

Während die radikalen Überlegungen des „transzendenten Nihilismus“, den Paul Mongré aus seiner „apagogischen“ Auflösung der Idee einer objektiven, „an sich“ gegebenen Zeit gewann, zu den unabhängigsten Überlegungen des jungen Hausdorff gehören[611], ist der Bezug auf andere zeitgenössische Überlegungen am deutlichsten in jenen Diskussionen des ausgehenden 19. und beginnenden 20 Jahrhunderts, die an Hermann v. Helmholtz’ Diskussionen des Raumes und der Geometrie anschlossen, namentlich im französischsprachigen Raum.[612] Dort erwies sich im Übergang zum 20. Jahrhundert besonders die von Henri Poincaré entwickelte Form einer konventionalistischen Interpretation der Grundlagen der Geometrie und Mechanik als eine für Naturwissenschaftler und Mathematiker attraktive und auch in philosophischen Kreisen viel diskutierte philosophische Position.[613]

Zentraler Ausgangspunkt für Poincarés Überlegungen war die von Helmholtz erläuterte enge Beziehung zwischen Geometrie und Mechanik, die Helmholtz zu einer sich zugleich als „empiristisch“ bezeichnenden und als die transzendentalen Begründungen Kants neu formulierenden Philosophie der Geometrie geführt hatte: Nur in ihrer Verknüpfung konnten Geometrie und Mechanik der Erfahrung gegenübergestellt werden, und nur unter der (als Bedingung der Möglichkeit räumlicher Messungen verstandenen) Annahme der freien Beweglichkeit starrer Körper konnten beide der Erfahrung gegenüber gestellt werden. Poincaré erkannte das Argument von Helmholtz hinsichtlich der Verknüpfung von Geometrie und Mechanik an, hielt jedoch (ebenso wie Hausdorff) die transzendentale Annahme von Helmholtz für falsch. Damit ergab sich auch für ihn die Existenz eines Spielraums von alternativen geometrisch-physikalischen Beschreibungsmöglichkeiten der empirischen Welt. Seine Ansicht war, dass dieser Spielraum durch ein theoriepragmatisches Kriterium der Einfachheit der gewählten Beschreibung gefüllt werden konnte und musste, und er beschrieb diesen Standpunkt selbst durch den Terminus der „Konventionen“, so, wenn er bereits in seinem Aufsatz „Les géométries non euclidiennes“ mit Blick auf die Natur der geometrischen Axiome betonte:

> Die geometrischen Axiome sind also weder synthetische Urteile a priori noch experimentelle Tatsachen. Sie sind Konventionen.[614]

Poincaré gab in seinen populären Abhandlungen eine Serie von leicht variierenden Begründungen für diese von ihm festgehaltene Position. Dabei bediente er sich, wie wir gesehen haben, ab etwa 1903 auch eines auf den Raum

[611] Wie deutlich geworden ist, verdankten freilich auch diese viel einer erkenntniskritischen Umkehrung von Motiven, die er in Otto Liebmanns *Analysis der Wirklichkeit* gefunden hatte, vgl. Abschnitte 2.3.4 und 3.3.

[612] Vgl. zu Helmholtz Abschnitte 2.3.1 und 2.3.6, zur französischen Debatte Abschnitt 2.3.7.

[613] Zu den historischen Anfängen und zum wissenschaftshistorischen Kontext von Poincarés konventionalistischen Überzeugungen vgl. den aufschlussreichen Beitrag [Nye 1979], zu seiner philosophischen Entwicklung einführend [Folina 1992] und [Heinzmann/Stump 2017], zu seiner wissenschaftlichen Biographie [Gray 2013].

[614] Der Aufsatz [Poincaré 1891] wurde in Poincarés erste Sammlung populärer Schriften [Poincaré 1902a] aufgenommen, dort findet sich die Passage auf S. 66, Übersetzung M.E.

bezogenenen Transformationsprinzips: Bei beidseitig stetigen, bijektiven Koordinatentransformationen des Raumes und einer passend veränderten Physik ließen sich unendlich viele gleichermaßen gültige Beschreibungen der empirischen Welt denken, von denen freilich die meisten so umständlich wären, dass sie wissenschaftlich wertlos blieben.

Das Kriterium der Einfachheit entfaltete Poincaré darüber hinaus in einem zugleich gruppentheoretischen und phänomenologischen Argument. Eine Analyse der verschiedenen Bewegungen, die uns die verschiedenen Sinne des Menschen wahrnehmbar machten, so suchte er zu zeigen, erlaubte die Auszeichnung einer Gruppe von Kongruenzbewegungen, hinsichtlich derer eine *einfache* räumliche Beschreibung der natürlichen Welt invariant sein musste. Nach Poincarés Überzeugung war dies jene Gruppe, die durch die Kongruenzen des dreidimensionalen euklidischen Raumes gegeben war. Damit legte Poincarés Einfachheitskriterium für die (ansonsten konventionelle) Wahl der geometrischen und physikalischen Beschreibung der Natur schließlich doch den dreidimensionalen euklidischen Raum fest.[615] Auf die durch die Relativitätstheorie entstandene Notwendigkeit einer Revision dieses Arguments hat der 1913 verstorbene Poincaré nur noch ansatzweise reagiert.[616]

Wie wir gesehen haben, lernte Hausdorff Poincarés Transformationsprinzip zu Beginn des 20. Jahrhunderts kennen,[617] und Poincarés Überlegungen begegneten ihm ein zweites Mal in seiner Lektüre von Schlicks Schrift „Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik“.[618] Das Kriterium der Einfachheit der von den empirischen Wissenschaften angestrebten Beschreibungen der Natur findet sich auch bei ihm (und bei Schlick) wieder. Freilich blieb Hausdorff dem von Poincaré skizzierten gruppentheoretisch-phänomenologischen Argument gegenüber skeptisch: Obwohl er die Gruppentheorie und den von Lie und Klein entwickelten gruppentheoretischen Zugang zur Geometrie schon seit seiner Studienzeit aus seiner eigenen mathematischen Arbeit gut kannte und darüber mehrfach Vorlesungen hielt[619], folgte er Poincarés Gedankengang an dieser Stelle nicht.

Der Grund dafür ist sicherlich, dass seine eigenen Ansichten in mehreren Hinsichten radikaler waren als die Poincarés. Zum einen schätzten beide den Wert formaler Analysen in Mathematik und Erkenntnislehre sehr verschieden ein: Wo Poincaré sich bisweilen distanziert über sie äußerte[620], hielt Hausdorff sie für höchst wertvoll, ja unerlässlich für die Bestimmung des Spielraums, den das Denken und die Erfahrung für den Entwurf mathematischer Beschreibungen von Zeit, Raum und anderen wissenschaftlichen Konzepten ließen. Nur *nach* einer genauen, mit formalen Mitteln erfolgenden Bestimmung dieses Möglichkeitsspektrums konnte die Frage gestellt werden, welche Möglichkeiten für die wissenschaftliche Theoriebildung am einfachsten und zweckmäßigsten waren.

[615]Das Argument findet sich z.B. im vierten Kapitel von [Poincaré 1902a].
[616]Vgl. dazu [Walter 2009].
[617]Vgl. Abschnitt 3.6.1.
[618]Vgl. Abschnitt 5.2.
[619]Vgl. dazu HGW, Band IB, S. 632-637 und S. 728.
[620]So etwa in seiner Besprechung von Hilberts *Grundlagen der Geometrie*, [Poincaré 1902b]

Zum anderen sah Hausdorff klarer als Poincaré, dass die topologische Schicht des Raumbegriffs und die ordnungstheoretische Schicht des Zeitbegriffs neben den traditionellen Raum und Zeitvorstellungen sehr viele weitere erlaubte, die in vielen Hinsichten mathematisch noch gar nicht verstanden waren. Worin genau schließlich der sinnvollste Weg einer künftigen, von falschen anschaulichen oder metaphysischen Annahmen befreiten Naturwissenschaft in dieser Hinsicht liegen würde, hielt Hausdorff vermutlich anders als Poincaré für nicht im Vorhinein beantwortbar.

Hausdorff hatte daher gute Gründe, seinen eigenen Standpunkt nicht als Konventionalismus, sondern eben als einen besonnenen, stets nur vorläufigen Empirismus zu bezeichnen. Freilich findet sich in seiner Position ein von ihm ausdrücklich eingestandenes konventionalistisches Element, das eben die in jedem bestimmten Stand der Wissenschaften erfolgende Festlegung in der Wahl formaler wissenschaftlicher Begriffe innerhalb eines jeweils gegebenen „Spielraums der Erfahrung" betraf.

6.2 Philosophie der Raumzeit

Wie für die zweite Phase von Hausdorffs Beschäftigung mit Zeit und Raum, so wurde auch für Poincarés konventionalistische Haltung die Entstehung der Relativitätstheorie zu einer Herausforderung, die eine Revision ihrer erkenntnistheoretischen Positionen erforderte. Diese Herausforderung hat im Lauf des zwanzigsten Jahrhunderts zu einer langen Reihe philosophischer Überlegungen geführt, die auf der Basis der Physik Einsteins und seiner Nachfolger eine breite Literatur zur Philosophie der Raumzeit hervorgebracht hat, der Hausdorffs Überlegungen gegenübergestellt werden können.

Hierbei sind zwei Aspekte zu unterscheiden. Zuächst ist klar, dass – ähnlich wie dies für alle anderen zeitgenössischen Positionen in diesem Feld zutrifft – die *konkrete Ausgestaltung* einer erkenntniskritischen Analyse von Zeit und Raum überdacht und revidiert werden musste. Wie in Abschnitt 5.1 bereits angedeutet, war mit dem Erscheinen von Einsteins Aufsatz über die spezielle Relativitätstheorie offensichtlich, dass Hausdorffs in den Jahren um 1903 erarbeitete und in der Vorlesung *Zeit und Raum* vorgestellte, separat erfolgende axiomatische Analyse von Zeit und Raum nicht sinnvoll weitergeführt werden konnte. Wie sein Manuskript über das Relativitätsprinzip zeigt, war Hausdorff sich ebenfalls darüber im Klaren, dass die *allgemeine* Relativitätstheorie zu einer weiteren Verknüpfung der Grundlagen von Raum und Zeit einerseits, der Physik andererseits führte, die noch über die bereits seit Helmholtz diskutierte Verbindung von Geometrie und Mechanik sowie die in der speziellen Relativitätstheorie erfolgte Verbindung mit der Elektrodamik hinausging. Wenn, wie Einstein nun vorschlug, *alle* physikalischen Gesetze in allgemein kovarianter Form formuliert und das Verhalten von Raum, Zeit und Materie durch die Lösung von allgemein kovarianten Feldgleichungen bestimmt werden musste, dann blieb auch eine separate Formulierung einer Erkenntniskritik der Raumzeit noch ein obsoletes Unterfangen. Auch die Physik der Materie in allen ihren Hinsichten musste in eine epistemologische Analyse einbezogen werden.[621]

Dieser enormen Aufgabe hat sich Hausdorff nicht gestellt, und es bleibt auch am Beginn des 21. Jahrhunderts fraglich, wie sie durchgeführt werden kann (von der weiterhin bestehenden Inkohärenz zwischen den Grundlagen der relativistischen und quantentheoretischen Physik einmal ganz abgesehen.)

Freilich bleibt die argumentative Kraft von Hausdorffs Überlegungen zu Zeit und Raum auch noch auf einer zweiten Ebene zu diskutieren. Man kann berechtigt die Frage aufwerfen, ob nicht auch *nach* der Einführung der Relativitätstheorie noch an einem „besonnenen Empirismus" der von Hausdorff skizzierten Art festgehalten werden kann oder sollte, und wie vor diesem Hintergrund die Motive seiner Erkenntniskritik in die spätere Philosophie von Raum, Zeit und Materie einzuordnen sind. Dies im Einzelnen auszuführen, übersteigt die Möglichkeiten dieser Einführung und muss künftiger Forschung überlassen bleiben. Einige Anknüpfungspunkte können jedoch benannt werden.

So findet sich die in Hausdorffs (und in eingeschränkter Form in Poincarés) Transformationsprinzip auf den Punkt gebrachte, in Mongrés Schriften aber auch weit darüber hinaus gehende argumentative Technik der fiktiven Variationen der Raumzeit und ihres physikalischen Inhalts – eine Technik, deren frühe Formen Hausdorff seinerseits aus der wissenschaftlichen Literatur des 19. Jahrhunderts von Baer über Helmholtz bis zu Clifford und Liebmann aufgenommen hatte – an mehreren Punkten der neueren Debatte einer Philosophie der relativistischen Physik wieder. Dies gilt namentlich für die Diskussion über das heute oft als „the hole argument" bezeichnete Problem. Einstein selbst war 1913 auf die Frage gestoßen, ob sich eine allgemein kovariante physikalische Theorie überhaupt aufstellen ließ, da in einem solchen Rahmen die Möglichkeit beliebiger Koodinatentransformationen in einem materiefreien Raumzeitgebiet bestand, welches die metrische und physikalische Struktur außerhalb dieses Gebietes unangetastet ließ.[622] Diese Überlegung invertierte gewissermaßen im relativistischen Rahmen die von Hausdorff „Calinons Experiment" genannte Überlegung, dass die außerhalb eines bestimmten Raumgebiets (z.B. des astronomischen Observatoriums) vor sich gehenden physikalischen Vorgänge einer beliebigen Transformation unterworfen werden konnten, von der innerhalb dieses Raumgebiets (im Observatorium) nichts bemerkt würde. Für kurze Zeit schien Einstein dadurch das Programm einer Allgemeinen Relativitätstheorie zweifelhaft zu werden; im Jahr 1915 kehrte er jedoch zur Suche nach allgemein kovarianten Feldgleichungen der Relativitätstheorie zurück und, so könnte man sagen, überließ es den Philosophen, Konsequenzen aus seinem Argument zu ziehen.

[621] Einen ersten, großangelegten Entwurf eines solchen Programms kann man in den philosophischen Begleitüberlegungen in Hermann Weyls Monographie *Raum, Zeit, Materie* und Weyls weiteren Beiträgen zur Philosophie der Naturwissenschaften erkennen. Es steht in manchen Hinsichten Poincarés gruppentheoretischer Argumentation näher als Hausdorffs Ausführungen; dennoch wäre ein näherer Vergleich lohnend.

[622] Vgl. [Norton 1987] sowie die revidierte Einführung in [Norton 2019].

Die an das Argument anschließende Literatur deutet dasselbe in einer Weise, die Hausdorffs früherer Haltung zur Frage des Raumes nicht unverwandt ist; sie nutzt es insbesondere, um eine substantialistische Auffassung der Raumzeit zurückzuweisen.[623] In der philosophischen Terminologie Liebmanns und Hausdorffs müsste man entsprechend von der Zurückweisung einer realistischen Auffassung von Zeit und Raum sprechen; die Problematik geht, wie wir gesehen haben, bis in die Diskussion des Raumes im 17. und 18. Jahrhundert zurück.[624] Die Parallele ist unübersehbar: Mongré wies einen metaphysischen Realismus für die beiden Anschauungsformen mit Hilfe seines Transformationsprinzips zurück; die neuere Literatur tut dies für die Mannigfaltigkeit der Raumzeit anhand des „hole argument".

Ein zweiter Anknüpfungspunkt betrifft den auch in der Relativitätstheorie ab und zu notierten mathematischen Spielraum in der Festlegung des für die Raumzeit gewählten Mannigfaltigkeitsbegriffs. Ein frühes Beispiel für das Bewusstsein dieses Spielraums findet sich in Hermann Weyls Kommentar zur Forderung der Differenzierbarkeit für eine Raumzeitmannigfaltigkeit:

> Es bleibt ein Problem, wie dieser Sachverhalt in seiner realen Bedeutung präzis zu formulieren ist. Es muß zugegeben werden, daß für diese Frage nach der Bedeutung der Differentialrechnung in ihrer Anwendung auf die Wirklichkeit noch fast nichts geleistet ist. Der heutige Zustand der Physik legt es nahe, jene Vagheit durch einen Wahrscheinlichkeitsansatz wiederzugeben.[625]

Noch weiter, bis hinunter in die Frage der topologischen Voraussetzungen für die Theoriebildung der Relativitätstheorie, reichen folgende Passagen in dem weit verbreiteten Lehrbuch *The large scale structure of space-time* von Stephen W. Hawking und George F.R. Ellis:

> The mathematical model we shall use for space-time, i.e. the collection of all events, is a pair $(\mathcal{M}, g)$ where $\mathcal{M}$ is a connected four-dimensional Hausdorff C^∞ manifold and g is a Lorentz metric (i.e. a metric of signature +2) on $\mathcal{M}$.
>
> [...] The manifold $\mathcal{M}$ is taken to be connected since we would have no knowledge of any disconnected component. It is taken to be Hausdorff since this seems to accord with normal experience. However in chapter 5 we will consider an example in which one might dispense with this condition.[626]

Wie aus diesen Bemerkungen hervorgeht, waren sich die Autoren bewusst, dass die Mathematisierung der Raumzeit nicht zwingend in einer bestimmten Form erfolgen musste. Ihre Entscheidung, eine vierdimensionale topologische Mannigfaltigkeit (d.h. einen topologischen Raum, in welchem jeder Punkt eine zur

[623] Neben Nortons Arbeiten sei hier insbesondere auf [Earman 1989] verwiesen.
[624] Vgl. Abschnitte 2.1.2 und 2.2.2.
[625] [Weyl 1918], S. 10 f. Für eine mathematikhistorische Einordnung dieser Bemerkung vgl. den Stellenkommentar von Erhard Scholz in der demnächst erscheinenden Neuausgabe von Weyls *Raum, Zeit, Materie* zum Stichwort „glatt".
[626] [Hawking/Ellis 1973], S. 56 f.

offenen Einheitssphäre des $\mathbb{R}^4$ homöomorphe Umgebung besitzt) zugrunde zu legen statt eines noch allgemeineren topologischen Raumes, rechtfertigten sie durch ein an Riemann erinnerndes anschaulich-empirisches Argument, welches sicherlich auch Hausdorffs Billigung gefunden hätte:

> A manifold corresponds naturally to our intuitive ideas of the continuity of space and time. So far this continuity has been established for distances down to about 10^{-15} cm by experiments on pion scattering [...]. It may be difficult to extend this to much smaller lengths as to do so would require a particle of such high energy that several other particles might be created and confuse the experiment.[627]

Hausdorff hätte allerdings wohl angefügt, dass damit weiterhin ein „Spielraum der Erfahrung" bestand, der mathematisch auf verschiedene Weise gefüllt werden konnte, und dass also auch noch andere topologische Räume als Mannigfaltigkeiten nicht prinzipiell ausgeschlossen werden konnten.

Mindestens an solchen spezifischen Punkten bleibt Hausdorffs Standpunkt eines besonnenen Empirismus auch in der durch die Relativitätstheorie stark veränderten Diskussionslage haltbar und attraktiv. Dass dies auch auf einer prinzipielleren Ebene zutrifft, zeigt am deutlichsten ein kurzer Vergleich mit dem in Wien entstandenen Programm des logischen Empirismus.

6.3 Besonnener vs. logischer Empirismus

Der oben beschriebene Kontakt zwischen Hausdorff und Schlick zeigt, dass es in der Frühphase der Entwicklung jener Richtung der Wissenschaftsphilosophie, die unter den Bezeichnungen des Wiener Kreises oder des logischen Empirismus bekannt geworden ist, zumindest eine nahe Berührung gegeben hat. Ob die in der Zwischenkriegszeit vor allem in Wien erfolgende weitere Entwicklung des logischen Empirismus durch Mongrés Buch *Das Chaos in kosmischer Auslese* oder durch seine Überzeugung

> Der Formalismus ist der wahre Empirismus.[628]

direkt oder indirekt mit angeregt war, bedarf weiterer Forschung. Während Schlick, der, wie die Schlick-Edition inzwischen zeigt, in seinen Anfängen ebenfalls stark durch Nietzsche geprägt war, eine *Allgemeine Erkenntnislehre* entwickelte, die dem formalen Empirismus Hausdorffs nicht allzu fern steht[629], blieben andere, später sehr wichtige Vertreter des Kreises zunächst noch in engeren wissenschaftsphilosophischen Auffassungen befangen, die Hausdorff wohl als metaphysisch abgelehnt hätte.

[627] [Hawking/Ellis 1973], S. 57.

[628] Vgl. Abschnitt 4.4.1.

[629] Die neue *Moritz Schlick Gesamtausgabe* weist in einigen Bänden bereits auf die Beziehung zu Hausdorff hin, vgl. etwa die (leider ungenaue) Besprechung des Briefwechsels zwischen Hausdorff und Schlick in Band 1/2, [Schlick 2006], S. 198, und den Hinweis auf die bei beiden bestehende Beziehung zu Nietzsche in Band II/5.1, [Schlick 2013], S. 2.

Dies betrifft zum einen den jungen Rudolf Carnap, dessen Dissertation *Der Raum* von 1921 noch sehr stark durch die neukantianische Philosophie geprägt war und zum Ziel hatte, durch eine umfassende, einem erneuerten transzendentalphilosophischen Programm folgende Thematisierung verschiedener Schichten von Voraussetzungen zu einem schließlich auch wieder mathematisch eindeutig bestimmten Raumbegriff zu gelangen.[630] Zum anderen galt dies zumindest anfänglich auch für den Mathematiker Hans Hahn, sofern Fragen der Logik betroffen waren: Anders als Hausdorff verstand Hahn diese als eine zwar symbolisch operierende, aber doch die Gesetze des Denkens realistisch abbildende Grundwissenschaft.[631]

Allerdings lässt sich in der Entwicklung des Wiener Kreises eine wichtige Wendung zu einem noch stärker formalen Standpunkt beobachten, die mit der Einsicht verbunden war, dass nicht nur physikalische und mathematische Theorien wie die Mechanik, die Geometrie oder Topologie, sondern selbst die Logik noch formale Alternativen besaß, und dass daher in einer konsequent empiristischen Philosophie der Wissenschaften auch die Eindeutigkeit der formalen Hilfsmittel preisgegeben werden musste.

Am klarsten hat diese erst in den späten zwanziger Jahren vollzogene Wendung Rudolf Carnap beschrieben. Sie findet sich systematisch zugespitzt in dem von ihm 1934 in seinem Werk *Logische Syntax der Sprache* formulierten Toleranzprinzip, das sich gegen restriktive Forderungen im Bereich der Grundlagen der Mathematik und allgemeiner in Fragen einer Begründung formaler Theorien richtete:

> Unsere Einstellung zu Forderungen dieser Art sei allgemein formuliert durch das Toleranzprinzip: wir wollen nicht Verbote aufstellen, sondern Festsetzungen treffen. Einige der bisherigen Verbote haben das historische Verdienst, dass sie auf wichtige Unterschiede nachdrücklich aufmerksam gemacht haben. Aber solche Verbote können durch eine definitorische Unterscheidung ersetzt werden. In manchen Fallen geschieht das dadurch, dass Sprachformen verschiedener Arten nebeneinander untersucht werden (analog den Systemen euklidischer und nichteuklidischer Geometrie), z. B. eine definite Sprache und eine indefinite Sprache, eine Sprache ohne und eine Sprache mit Satz vom ausgeschlossenen Dritten. [...] In der Logik gibt es keine Moral. Jeder mag seine Logik, d. h. seine Sprachform, aufbauen wie er will. Nur muß er, wenn er mit uns diskutieren will, deutlich angeben, wie er es machen will, syntaktische Bestimmungen geben anstatt philosophischer Erörterungen.[632]

In einer Fußnote zur Einführung seines Toleranzprinzips schrieb Carnap die Anregung für diese Veränderung seiner erkenntnistheoretischen Haltung einem

[630] [Carnap 1922]. Zur Interpretation der Dissertation vgl. insbesondere [Friedman 1999].

[631] Vgl. [Hahn 1929]. Inwieweit auch bei Hausdorff insofern ein realistisches Element in der Auffassung des Formalismus zu finden ist, als er die Forderung der Widerspruchslosigkeit als ein – für die Mathematik – feststehendes Denkgesetz betrachtete, wäre zu prüfen. Hier standen sich Hausdorff und Hahn, in diesem Punkt beide auch Hilbert verwandt, nicht allzu fern.

[632] [Carnap 1934], S. 44f.

Mathematiker zu, der zu dieser Zeit tief in die deskriptive Mengenlehre eingearbeitet war und daher auch durch die Schule von Hausdorffs mathematischem Werk in Mengenlehre und allgemeiner Topologie gegangen war:

> Die hier gemeinte tolerante Einstellung dürfte, bezogen auf spezielle mathematische Kalküle, den meisten Mathematikern naheliegen, ohne daß man sie ausdrücklich auszusprechen pflegt. Im Streit um die logischen Grundlagen der Mathematik ist sie mit besonderem Nachdruck (und anscheinend zuerst) von Menger [...] vertreten worden.[633]

Menger war zu dieser Zeit sehr daran interessiert, die Beiträge, die Brouwer im Lauf der zwanziger Jahre zur Begründung einer intuitionistischen Analysis geliefert hatte, in Beziehung zu setzen zu Begriffen und Konstruktionen der deskriptiven Mengenlehre. Nicht zuletzt in diesen Arbeiten war ihm klar geworden, dass sowohl für die Analysis als auch für die Logik alternative Formulierungen vorlagen, zwischen denen eine Entscheidung aus rein erkenntnistheoretischen Gründen unmöglich war.[634] Er dürfte Carnap auch darauf verwiesen haben, dass die von diesem geforderte „tolerante Einstellung" etlichen modernen Mathematikern bereits nahe lag, und er wird dieselbe nicht zuletzt in Hausdorffs *Grundzügen der Mengenlehre* sowie dem späteren, die deskriptive Mengenlehre entfaltenden Band *Mengenlehre* von 1927 vorgefunden haben.

Hausdorff und Menger standen zudem im Jahr 1929 in einem kurzen brieflichen Austausch, der zeigt, dass beide die Schriften des jeweils anderen zur deskriptiven Mengenlehre und zu Grundlagenfragen lasen und sich gegenseitig Anerkennung zollten. In einem erhaltenen Brief an Menger vom März 1929 lobte Hausdorff insbesondere dessen Übersetzung des Brouwerschen Mengenbegriffs in die Sprache der deskriptiven Mengenlehre; darüber hinaus bezeichnete er die Dimensionstheorie Mengers – die sachlich mit Hausdorffs eigenen Arbeiten zu diesem Thema verwandt war – als „Meisterleistung".[635]

Angesichts dieses Kontakts und im Licht der im vorliegenden Band versammelten Arbeiten Hausdorffs stellt sich die Frage, ob nicht bereits Hausdorffs frühere Betonung der Spielräume für die Bildung mathematischer Begriffe und seine Verteidigung des „Radicalismus" einer frei verwendeten mathematischen Sprache[636], sowie seine entschieden die Autonomie der Mathematik fordernde Beschreibung des Formalismus und seine ebenso entschiedene Zurückweisung jeder „verlarvten Metaphysik" im Aufbau der Naturwissenschaften, als frühe Beiträge zu einer Artikulation der nun von Carnap geforderten „toleranten Einstellung" gelten müssen.

Wie Hausdorff, so waren auch die Wiener logischen Empiristen nicht nur am Aufbau formaler Systeme interessiert, sondern noch mehr an der Frage, wie

[633] Carnap verwies hier auf Karl Mengers Aufsatz „Der Intuitionismus" [Menger 1930], S. 324 f. – Zur Beziehung, aber auch zu den philosophischen Differenzen zwischen Menger und Carnap vgl. auch [Friedman 1999], S. 210-214.

[634] Die Problematik der Brouwerschen Verbote in den Grundlagen der Analysis und Mengers diesbezügliche Haltung wird auch diskutiert in [Epple 2000].

[635] Vgl. Felix Hausdorff an Karl Menger, 20. März 1929, in HGW, Band IX, S. 497, sowie den zugehörigen Kommentar von Walter Purkert, ebd., S. 498-500.

[636] Vgl. Abschnitt 4.2.3.

dieselben einen Beitrag zur empirischen Wissenschaft leisten konnten. Auch für sie bestand daher das eigentliche erkenntniskritische Problem darin, wie Formalismus und Empirismus zusammen zu denken waren. Auf der einen Seite stand ein großer Spielraum in der Konstruktion formaler Systeme, auf der anderen eine komplexe Erfahrung, die sich aus individuellen Wahrnehmungen und Erlebnissen ebenso wie aus sprachlich und praktisch vermittelten „objektiven" Erfahrungen zusammensetzte. Bereits in Abschnitt 5.2. haben wir gesehen, dass nicht erst Schlick und die Wiener Philosophen, sondern bereits Hausdorff den Schlüssel für die Herstellung einer Beziehung zwischen beiden in der (sprachlich erfolgenden) Zuordnung von Ausdrücken der formalen Theorie zu Elementen oder Komplexen der Erfahrung sahen, und wie nun Carnap, so hatte auch Hausdorff bereits Überlegungen über die Freiheit in der Wahl geeigneter Sprachen der formalen (insbesondere mathematischen) Theoriebildung angestellt.[637]

Gegen Ende der 1920er Jahre gab auch der zum mathematischen Umfeld des Wiener Kreises zählende, mit Hans Hahn und Karl Menger gut vertraute Kurt Reidemeister eine interessante Einschätzung dieser Problematik, die als weiteres Dokument für die sich in diesen Jahren stark wandelnden grundlagentheoretischen Ansichten der logischen Empiristen dienen kann. In seinem 1928 veröffentlichten Aufsatz „Exaktes Denken", der auch in das Literaturverzeichnis des Manifests des Wiener Kreises aufgenommen wurde[638], beschrieb Reidemeister eine Auffassung der formalen Logik, welche diese als eine spezielle Form der Kombinatorik von Zeichensystemen *ohne* ein realistisch zu verstehendes Fundament in festen Gesetzen des Denkens verstand. Wie Menger, so war auch Reidemeister, der mit der zu dieser Zeit von Hilbert vertretenen formalen Neubegründung der Mathematik eng vertraut war, sich der Möglichkeiten *verschiedener* Fassungen der Logik und mathematischer Theorien bewusst. Reidemeister, der im Lauf seines Studiums auch Edmund Husserls Philosophie kennengelernt hatte, war davon überzeugt, dass die Beziehung zwischen formalen Systemen und der Welt der Erfahrung stets *problematisch* blieb, d.h. dass die durch Zuordnung der formalen Ausdrücke zu Elementen oder Komplexen der erlebten Welt versuchte Verknüpfung nie eindeutig, stabil, oder endgültig sein konnte; in Hausdorffs Sprechweise könnte man sagen, dass also ein nie ganz auszuschließender Spielraum für die Bildung empirisch bedeutsamer formaler Systeme bestehen blieb. Auch diese Einschätzung der Beziehung zwischen formalen und empirischen Anteilen in den exakten Wissenschaften stand zwar in einem anderen philosophischen Horizont als diejenige Hausdorffs, sie war aber mit dessen Ansichten eng verwandt.

Diese Andeutungen müssen genügen. Insgesamt wird deutlich, was Schlick ohne Zögern bereits 1919 anerkannt hatte: Die Erkenntniskritik Hausdorffs besitzt eine vorläufig noch nicht vollständig erschlossene historische Beziehung

[637]Zur Idee der Zuordnung liegt ebenfalls eine breite philosophische Literatur vor, vgl. u.a. [Ryckman 1991], [Friedman 1999], S. 35 ff. zu Schlick und S. 122 ff. zu Carnap. Zu Hausdorffs Überlegungen zur Freiheit der mathematischen Sprache vgl. oben, Abschnitt 4.2.3.

[638][Reidemeister 1928]; vgl. [Wiener Kreis 1929]. Zu Reidemeisters erkenntnistheoretischer Haltung vgl. auch [Epple 1999], § 97.

zur Entwicklung des logischen Empirismus Wiener Prägung. Freilich war sie literarisch und philosophisch freier, und zugleich vielleicht auch mathematisch radikaler gedacht.

6.4 Die Selbstkritik der Wissenschaft

Noch im Jahr 1941 wurde Hausdorff ein vielleicht letztes Mal auf seine Bücher *Sant' Ilario* und *Das Chaos in kosmischer Auslese* angesprochen. Johannes Käfer, ein 1899 geborener, als Bankangestellter und Musiker berufstätiger Leser der Werke Mongrés, der sich nach dem Zweiten Weltkrieg selbst mehrfach schriftstellerisch äußerte[639], schickte Hausdorff die „enthusiastischen Bekenntnisse“ seiner Anerkennung. Hausdorff bedankte sich, zögerte jedoch, darauf näher einzugehen:

> Meine philosophische Schriftstellerei liegt vierzig Jahre hinter mir; sie wurde durch meine mathematische Arbeit zum Stillstand gebracht, und zwar nicht nur, weil die amtliche Tätigkeit meine ganze Zeit beanspruchte, sondern mehr noch, weil die Mathematik mich innerlich auf höhere und höchste Forderungen an wissenschaftliche Präzision umstellte. Ich halte mich heute nicht mehr für einen Philosophen (das Chaos in kosmischer Auslese, das allenfalls zur Philosophie gerechnet werden könnte, würde ich heute auch anders schreiben als damals); ich darf hinzufügen, dass ich auch Nietzsche und Schopenhauer zwar für gewaltige Dichter, aber nicht für wissenschaftliche Philosophen halte.[640]

Der Brief schloss mit einer nur allzu berechtigten, tief pessimistischen Einschätzung der Lage der Juden und anderer Verfolgter in dem verbrecherischen Staat, in dem Hausdorff nun lebte:

> Von einem Strauch, der Jahre lang mit Lauge begossen wird, darf man keine süssen Beeren erwarten. Nietzsche hat immer gefürchtet, dass Europa an einer Hysterie des Mitleidens zugrunde gehen würde: man kann nicht behaupten, dass diese Diagnose sehr zutreffend war.[641]

In Hausdorffs Brief schwingen viele verschiedene Töne mit. Soweit die in diesem Band beleuchteten, auf drei Phasen verteilten Bemühungen des Schriftstellers Mongré und des Mathematikers Hausdorff um eine Erkenntniskritik der Zeit und des Raumes betroffen sind, kann seinen Andeutungen ein konkreter Sinn gegeben werden. Der „transzendente Nihilismus“ der ersten Phase seiner „philosophischen Schriftstellerei“ hatte, wie in Teil 4 dieser Einleitung dargestellt, in der zweiten Phase seiner Überlegungen zu einem „besonnenen Empirismus“ geführt und damit einen neuen, präziseren Sinn angenommen. In Teil 5 haben wir dann gesehen, dass auch die mit der späteren mathematischen Arbeit Hausdorffs verbundenen Klärungen noch zu einer Vertiefung dieser Haltung herangezogen werden konnten, und dass sie in manchen Aspekten auch weiterhin durch seine philosophischen Anliegen begleitet wurden.

[639] Biographische Notizen zu Käfer finden sich in HGW, Band IX, S. 355.
[640] Felix Hausdorff an Johannes Käfer, 2. Januar 1941, in HGW, Band IX, S. 357.
[641] Ebd.

So lässt sich auch verstehen, in welcher Weise Hausdorf sein Buch *Das Chaos in kosmischer Auslese* nun – in anderen Umständen – anders schreiben und zum Beitrag zu einer „wissenschaftlichen Philosophie“ hätte machen können, wie er wohl auch in Anspielung auf das Programm des Wiener Kreises formulierte. Hausdorffs besonnener Empirismus bestand dabei in letzter Konsequenz weniger in der Verteidigung einer konkret ausgestalteten, eigenen und beispielsweise mit axiomatischen Mitteln durchgeführten *Bestimmung* des Zeit- und Raumkonzeptes, das für die verschiedenen Zweige der Naturwissenschaften zugrunde gelegt werden sollte, wie dies neben Poincaré unter anderen auch der frühe Rudolf Carnap und Hermann Weyl versucht hatten.[642] Vielmehr ging es Hausdorff um den kritischen Nachweis eines stets bestehenden *Spielraums der Mathematisierung* wissenschaftlicher Begriffe.

Für den mathematischen Raumbegriff hatte Hausdorff dies in seiner Leipziger Antrittsvorlesung *Das Raumproblem* ausgeführt. Seine Auszeichnung des in drei Hinsichten bestehenden formalen „Spielraums des Denkens“, des je individuellen „Spielraums der Anschauung“, und des zu jeder Zeit bestehenden „Spielraums der Erfahrung“ hatte auch für jeden anderen Begriff und Bereich der mathematisch verfahrenden Wissenschaften Bestand. Die Mittel, mit welchen diese Spielräume erkundet werden konnten, bestimmte Hausdorff in der zweiten Phase durch die Heranziehung der Möglichkeiten einer axiomatischen Analyse formaler Systeme neu. In der dritten Phase trug er dann durch seine Untersuchung geordneter Mengen und topologischer Räume sowie durch seinen neuen Dimensionsbegriff entscheidend zur Erweiterung des Spektrums möglicher mathematischer Formen bei, das im Bereich anderer Wissenschaften genutzt werden konnte.

Hausdorffs besonnener Empirismus lässt sich dabei unabhängig vom jeweiligen Stand der physikalischen Wissenschaft verfolgen. Ja, er wird mit jeder neuen mathematischen Begriffsbildung, die im historischen Gang der Wissenschaften auftaucht, von neuem wichtig. Er ist zugleich stark vom historischen Stand der Mathematik abhängig, denn die Frage, *welche* mathematischen Begriffsgebäude jeweils zur Verfügung stehen, führt in schwierige und möglicherweise nicht abschließend zu beantwortende mathematische Fragen.

⋆

Es wird auch künftig die Aufgabe einer mathematisch geschulten Analyse der Wissenschaften bleiben, die bestehenden Spielräume der Mathematisierung eines Erkenntnisgebietes auszuloten, unter Einsatz aller imaginativen Kraft, die dem mathematischen Denken innewohnt, und unter Beachtung der jeweils vorhandenen empirischen Kenntnisse. Der Wert dieser Tätigkeit besteht in jeder spezifischen Situation einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Erkenntnis darin, auf die in einer bestimmten mathematischen Fassung eines wissenschaftlichen Problems liegenden, nicht zwingenden Festlegungen hinzuweisen und so

[642] Vgl. Abschnitte 6.1 bis 6.3.

zu verhindern, dass sich in eine vermeintlich sichere wissenschaftliche Erkenntnis meta-physische, *nicht* durch empirische Erkenntnis gerechtfertigte Elemente unbemerkt einmischen. Geben wir noch einmal dem Schriftsteller Mongré des Jahres 1897 das Wort, das auch 1941, als der Brief an Käfer geschrieben wurde, noch gültig blieb:[643]

> Uns fehlt eine Selbstkritik der Wissenschaft [...]. Vielleicht ist dies die letzte Bestimmung der *Mathematik*.

[643] Vgl. Abschnitt 3.1.2.

Literatur

[Bachelard 1932] Gaston Bachelard: *L'Intuition de l'instant: Étude sur la Siloë de Gaston Roupnel.* Paris: Stock, 1932.

[Baer 1864] Karl Ernst von Baer: *Reden, gehalten in wissenschaftlichen Versammlungen.* Erster Teil. Petersburg: Schmitzdorff, 1864.

[Beiser 2015] Frederick C. Beiser: *The Genesis of Neo-Kantianism, 1796-1880.* Oxford: Oxford University Press, 2015.

[Beltrami 1866] Eugenio Beltramii: „Risoluzione del problema: Riportare i punti di un superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano representare da linee rette.“ *Annali di matematica* 7 (1866), 185-204.

[Beltrami 1868] Eugenio Beltrami: „Saggio di interpretazione della geometria non-Euclidea.“ *Giornale di matematiche* 6 (1868), 284-312.

[Bergson 1889] Henri Bergson: *Essai sur les données immédiates de la conscience.* Paris: Félix Alcan, 1889.

[Berkeley 1709] George Berkeley: *An Essay Towards a New Theory of Vision.* Dublin: Aaron Rhames, 1709.

[Berkeley 1710] George Berkeley: *A Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge.* Dublin: Aaron Rhames, 1710.

[Calinon 1885] Auguste Calinon: *Étude critique sur la Mécanique.* Nancy: Berger, Levrault et Cie., 1885.

[Calinon 1887] Auguste Calinon: „Le temps et la force.“ *Revue philosophique* 23 (1887), 285-298.

[Calinon 1889] Auguste Calinon: „Les espaces géométriques.“ *Revue philosophique* 27 (1889), 588-595.

[Calinon 1890] Auguste Calinon: *Étude de cinématique à deux et à trois dimensions.* Paris/Nancy: Berger, Levrault et Cie., 1890.

[Calinon 1893] Auguste Calinon: „L'indetermination géométrique de l'univers.“ *Revue philosophique* 36 (1893), 595-607.

[Cantor 1878] Georg Cantor: „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.“ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84 (1878), 242-258. Auch in [Cantor 1932], S. 119-133.

[Cantor 1932] Georg Cantor: *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Herausgegeben von Ernst Zermelo. Berlin: Julius Springer, 1932.

[Carnap 1922] Rudolf Carnap: *Der Raum: Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre.* Berlin: Reuther & Reichard, 1922.

[Carnap 1934] Rudolf Carnap: *Logische Syntax der Sprache.* Wien: Julius Springer, 1934.

[Clarke 1717] Samuel Clarke: *A Collection of Papers, Which Passed Between the late Learned Mr. Leibnitz, and Dr. Clarke, In the Years 1715 and 1716.* London: James Knapton, 1717.

[Clifford 1876] William Kingdon Clifford: „On the Space Theory of Matter.“ *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 2 (1876), 157-158.

[Clifford 1879] William Kingdon Clifford: *Lectures and Essays.* Hg. von Leslie Stephen und Frederick Pollock, 2 Bde. London: Macmillan & Co., 1879.

[Clifford 1885] William Kingdon Clifford: *The Common Sense of the Exact Sciences.* London: Kegan Paul, Trench & Co., 1885.

[Couturat 1893a] Louis Couturat: „≪L'année philosophique≫ de F. Pillon.“ *Revue de métaphysique et de morale* 1 (1893), 63-85.

[Couturat 1893b] Louis Couturat: „Note sur la géométrie non euclidienne et la relativité de l'espace.“ *Revue de métaphysique et de morale* 1 (1893), 302-309.

[Delbœuf 1860] Joseph Delbœuf: *Prolegomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats.* Liège: J. Desoer, 1860.

[Delbœuf 1883] Joseph Delbœuf: „Nains et géants.“ *Revue Scientifique de la France et de l'Etranger* 31 (1883), 97-104.

[Delbœuf 1893] Joseph Delbœuf: *Mégamicros ou les effets sensibles d'une réduction proportionnelle des dimensions de l'univers.* Paris: F. Alcan, 1893.

[Delbœuf 1894] Joseph Delbœuf: „Are the Dimensions of the Physical World Absolute? Space, Geometric and Actual.“ *The Monist* 4 (1894), 248-260.

[Derham 1715] William Derham: *Astro-Theology, or a Demonstration of the Being and Attributes of God, From a Survey of the Heavens.* London: W. Innys, 1715.

[Drude 1900] Paul Drude: *Lehrbuch der Optik.* Leipzig: Hirzel, 1900.

[Earman 1989] John Earman: *World Enough and Space-Time: Absolute versus Relational Theories of Space and Time.* Cambridge, Mass.: MIT Press, 1989.

[Einstein 1905] Albert Einstein: „Zur Elektrodynamik bewegter Körper.“ *Annalen der Physik* 17 (1905), 891-921.

[Epple 1996] Moritz Epple: *Das Ende der Größenlehre: Eine Einführung in die Geschichte der Grundlagen der Analysis, 1860-1930.* Preprint-Reihe des Fachbereichs Mathematik der Universität Mainz 8, 1996. Gekürzte Fassung: „Grundlagen der Analysis, 1860-1930.“ In Hans Niels Jahnke (Hg.): *Geschichte der Analysis.* Heidelberg: Spektrum Verlag, 1999, S. 371-410.

[Epple 1999] Moritz Epple: *Die Entstehung der Knotentheorie: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie.* Wiesbaden: Vieweg, 1999.

[Epple 2000] Moritz Epple: „Did Brouwer's Intuitionism Satisfy its own Epistemological Standards?“ In Vincent F. Hendricks, Stig A. Pedersen und Klaus F. Jørgensen (Hg.): *Proof Theory: History and Philosophical Significance.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000, S. 153-178.

[Epple 2016] Moritz Epple: „>Analogien<, >Interpretationen<, >Bilder<, >Systeme< und >Modelle<: Bemerkungen zur Geschichte abstrakter Repräsentationen in den Naturwissenschaften seit dem 19. Jahrhundert.“ *Forum Interdisziplinäre Begriffsgeschichte* 5/1 (2016), 11-30.

[Erdmann 1877] Benno Erdmann: *Die Axiome der Geometrie: Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtzschen Raumtheorie.* Leipzig: Leopold Voss, 1877.

[Folina 1992] Janet Folina: *Poincare and the Philosophy of Mathematics.* London: MacMillan and New York: St. Martin's Press, 1992.

[Fontenelle 1686] Bernard Bovier de Fontenelle: *Entretiens sur la pluralité des mondes.* Paris: Veuve C. Blageart, 1686.

[Formey/D'Alembert 1751] Art. „Espace.“ In Denis Diderot und Jean D'Alembert (Hg.): *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des metiers.* Band 5. Paris: Briasson et al., 1751, S. 953-956.

[Fox 1974] Robert Fox: „The Rise and Fall of Laplacian Physics.“ *Historical Studies in the Physical Sciences* 4 (1974), 89-136.

[Frechet 1906] Maurice Frechet: „Sur quelques points du calcul fonctionnel.“ *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 22 (1906), 1-72.

[Frege 1980] Gottlob Frege: *Briefwechsel.* Hg. von Gottfried Gabriel et al., Hamburg: Meiner, 1980.

[Friedman 1992] Michael Friedman: *Kant and the Exact Sciences.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1992.

[Friedman 1999] Michael Friedman: *Reconsidering Logical Positivism.* Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

[Friedman 2012] Michael Friedman: „Kant on Geometry and Spatial Intuition.“ *Synthese* 186 (2012), 231-255.

[Galison 2003] Peter Galison: *Einstein's Clock's, Poincaré's Maps.* New York: W.W. Norton, 2003.

[Gray 1989] Jeremy J. Gray: *Ideas of Space: Euclidean, non-Euclidean, and Relativistic.* 2nd edition. Oxford: Clarendon Press, 1989.

[Gray 2008] Jeremy J. Gray: *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics.* Princeton: Princeton University Press, 2008.

[Gray 2013] Jeremy J. Gray: *Henri Poincaré: A Scientific Biography.* Princeton: Princeton University Press, 2013.

[Guicciardini 2009] Niccolò Guicciardini: *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method.* Cambridge, Mass.: MIT Press, 2009.

[Hahn 1929] Hans Hahn: „Empirismus, Mathematik, Logik.“ *Forschungen und Fortschritte* 5 (1929). Auch in [Hahn 1988], S. 55-58.

[Hahn 1933] Hans Hahn: „Die Krise der Anschauung.“ In *Krise und Neuaufbau in den exakten Wissenschaften: Fünf Wiener Vorträge.* Leipzig und Wien: Franz Deuticke, 1933, S. 41-64. Auch in [Hahn 1988], S. 86-114.

[Hahn 1988] Hans Hahn: *Empirismus, Logik, Mathematik.* Mit einer Einleitung von Karl Menger hg. von Brian McGuinness. Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1988

[Hankel 1867] Hermann Hankel: *Theorie der complexen Zahlensysteme.* Leipzig: Leopold Voss, 1867.

[Hartmann 1869] Eduard von Hartmann: *Philosophie des Unbewußten: Versuch einer Weltanschauung.* Berlin: Carl Duncker, 1869.

[Hawking/Ellis 1973] Stephen W. Hawking und George F.R. Ellis: *The Large-Scale Structure of Space-Time.* Cambridge: Cambridge University Press, 1973.

[Heidelberger 1993] Michael Heidelberger: *Die innere Seite der Natur: Gustav Theodor Fechners wissenschaftlich-philosophische Weltauffassung.* Frankfurt am Main: Klostermann, 1993.

[Heinzmann/Stump 2017] Gerhard Heinzmann und David Stump: „Henri Poincaré.“ In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Winter 2017 Edition, hg. von Edward N. Zalta. *https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/poincare/*

[Helmholtz 1855] Hermann Helmholtz: *Ueber das Sehen des Menschen: Ein populär wissenschaftlicher Vortrag gehalten in Königsberg in Pr. zum Besten von Kant's Denkmal am 27. Februar 1855.* Leipzig: Leopold Voss, 1855.

[Helmholtz 1867] Hermann Helmholtz: *Handbuch der physiologischen Optik.* Leipzig: Leopold Voss, 1867.

[Helmholtz 1868] Hermann Helmholtz: „Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen." *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* 9 (1868), 193-221.

[Helmholtz 1870] Hermann Helmholtz: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome: Vortrag gehalten im Docentenverein zu Heidelberg 1870." In ders., *Vorträge und Reden.* Band 2, 4. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1883.

[Helmholtz 1878] Hermann Helmholtz: „Ueber den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze; Antwort gegen Herrn Professor Land." (Originaltext für die in *Mind* 10 (1878), 212-224 veröffentlichte englische Übersetzung.) In ders., *Wissenschaftliche Abhandlungen.* Band 2. Leipzig: Barth, 1883.

[Hertz 1894] Heinrich Hertz: *Die Prinzipien der Mechanik, in neuem Zusammenhange dargestellt.* Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1894.

[Hessenberg 1905] Gerhard Hessenberg: „Beweis des Desargueschen Satzes aus dem Pascalschen." *Mathematische Annalen* 61 (1905), 161-172.

[Hilbert 1891] David Hilbert: „Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück." *Mathematische Annalen* 38 (1891) 459-460.

[Hilbert 1895] David Hilbert: „Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte (Aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe)." *Mathematische Annalen* 46 (1895), 91-96.

[Hilbert 1898/1899] David Hilbert: *Elemente der Euklidischen Geometrie.* Autographierte Vorlesung Wintersemester 1898/99, Göttingen; Ausarbeitung H. von Schaper, SUB Göttingen, Cod. Ms. D. Hilbert 552. Nachdruck mit Anmerkungen in [Hilbert 2004], S. 302-407.

[Hilbert 1899] David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie.* In *Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen.* Herausgegeben von dem Fest-Comitee. Leipzig: Teubner, 1899. Separatdruck Oktober 1900. Nachdruck in [Hilbert 2004], S. 436-525. Zweite Auflage 1903 (3 weitere Auflagen zu Hilberts Lebzeiten, 5 weitere bis 1999.

[Hilbert 1902] David Hilbert: „Ueber die Grundlagen der Geometrie." *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1902), 233-241. Wiederabgedruckt in [Hilbert 1903].

[Hilbert 1903] David Hilbert: „Ueber die Grundlagen der Geometrie.“ *Mathematische Annalen* 56 (1903), 381-422.

[Hilbert 2004] David Hilbert: *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902.* Hg. von Michael Hallett und Ulrich Majer. Berlin: Springer, 2004.

[Hölder 1901] Otto Hölder: „Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass.“ *Leipziger Berichte, Math. Phys. Klasse* 53 (1901), 1-64.

[Huygens 1703] Christian Huygens: *COSMOTHEOROS Oder Welt-betrachtende Muthmassungen von denen himmlischen Erds-Kugeln und deren Schmuck.* Leipzig: Friedrich Lanckischens Erben, 1703. (Zuerst erschienen in lateinischer Sprache: *KOSMOTHEOROS, sive De Terris Coelestibus, earumque ornatu, Conjecturae.* Den Haag: Adrianus Moetjens, 1698.)

[Jung 2005] Tobias Jung: „Franz Selety (1893-1933?): Seine kosmologischen Arbeiten und der Briefwechsel mit Einstein.“ *Acta Historica Astronomiae* 27 (2005), 125-141.

[Kant 1755] Immanuel Kant: *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt.* Königsberg und Leipzig: Johann Friederich Petersen, 1755.

[Kant 1781] Immanuel Kant: *Critik der reinen Vernunft.* Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1781 = KrV A.

[Kant 1783] Immanuel Kant: *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1783.

[Kant 1786] Immanuel Kant: *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft.* Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1786.

[Kant 1787] Immanuel Kant: *Critik der reinen Vernunft.* Zweite Ausgabe. Riga: Johann Friedrich Hartknoch, 1787 = KrV B.

[Killing 1878] Wilhelm Killing: „Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung.“ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 86 (1878), 72-83.

[Killing 1879] Wilhelm Killing: „Die Rechnung in den Nicht-Euklidischen Raumformen.“ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 89 (1879), 265-287.

[Killing 1885a] Wilhelm Killing: *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.* Leipzig: B. G. Teubner, 1885.

[Killing 1885b] Wilhelm Killing: „Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen.“ *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 98 (1885), 1-48.

[Killing 1891] Wilhelm Killing: „Ueber die Clifford-Kleinschen Raumformen.“ *Mathematische Annalen* 39 (1891), 257-278.

[Killing 1893] Wilhelm Killing: *Einführung in die Grundlagen der Geometrie.* Erster Band. Paderborn: F. Schöningh, 1893.

[Kirchhoff 1876] Rudolf Kirchhoff: *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik.* Leipzig, B. G. Teubner, 1876.

[Klein 1871] Felix Klein: „Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie.“ *Mathematische Annalen* 4 (1871), 573-625.

[Klein 1890] Felix Klein: „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.“ *Mathematische Annalen* 37 (1890), 544-590.

[Klein 1893] Felix Klein: *Nicht-euklidische Geometrie.* Autographierte Ausarbeitung der Vorlesungen im Wintersemester 1889/1890 und Sommersemester 1890 von Friedrich Schilling, 2 Bde. Göttingen, 1893.

[Köhnke 1986] Klaus Christian Köhnke: *Entstehung und Aufstieg des Neukantianismus: Die deutsche Universitätsphilosophie zwischen Idealismus und Positivismus.* Frankfurt am Main: Suhrkamp, 1986.

[Kreyszig 1990] Erwin Kreyszig: „Friedrich Riesz als Wegbereiter der Funktionalanalysis.“ *Elemente der Mathematik* 45/5 (1990), 117-130.

[Landauer 1903] Gustav Landauer: *Skepsis und Mystik: Versuche im Anschluss an Mauthners Sprachkritik.* Berlin: Egon Fleischel & Co., 1913.

[Laplace 1819] Pierre Simon de Laplace: *Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeiten.* Übersetzt von Friedrich Wilhelm Tönnies. Heidelberg: Karl Gross, 1819.

[Laplace 1824] Pierre Simon de Laplace: *Exposition du système du monde.* 5. Auflage. Paris: Bachelier, 1824.

[Lechalas 1890] Georges Lechalas: „La géométrie générale et les jugements synthétiques a priori.“ *Revue philosophique* 30 (1890), 157-169.

[Lechalas 1896] Georges Lechalas: *Étude sur l'espace et le temps.* Paris: Felix Alcan, 1896.

[Lie 1886] Sophus Lie: „Bemerkungen zu Helmholtz's Arbeit: Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grund liegen.“ *Leipziger Berichte* (1886) Supplement, abgeliefert am 21. 2. 1887, S. 337-342.

[Lie/Engel 1893] Sophus Lie, unter Mitwirkung von Friedrich Engel: *Theorie der Transformationsgruppen: Dritter und letzter Abschnitt.* Leipzig: B. G. Teubner, 1893.

[Liebmann 1876] Otto Liebmann: *Zur Analysis der Wirklichkeit: Philosophische Untersuchungen.* Straßburg: Karl J. Trübner, 1876.

[Liebmann 1880] Otto Liebmann: *Zur Analysis der Wirklichkeit: Eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie.* Zweite, beträchtlich vermehrte Auflage. Straßburg: Karl J. Trübner, 1880.

[Liebmann 1902] Heinrich Liebmann: „Die Kegelschnitte und die Planetenbewegung im nichteuklidischen Raum." *Leipziger Berichte* 54 (1902), 393-423.

[Liebmann 1903] Heinrich Liebmann: „Über die Zentralbewegung in der nichteuklidischen Geometrie." *Leipziger Berichte* 55 (1903), 146-153.

[Lipschitz 1872] Rudolf Lipschitz: „Untersuchungen eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 74 (1872), 116-149.

[Lipschitz 1873] Rudolf Lipschitz: „Extension of the Planet-Problem to a Space of n Dimensions and Constant Curvature." *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 12 (1873), 349-370.

[Mach 1886] Ernst Mach: *Die Analyse der Empfindungen und das Verhältnis des Physischen zum Psychischen.* Jena: Gustav Fischer, 1886.

[Meli 2002] Domenico Bertoloni Meli: „Newton and the Leibniz-Clarke Correspondence." In I. Bernard Cohen and George E. Smith (Hg.): *The Cambridge Companion to Newton.* Cambridge: Cambridge University Press, S. 455-464.

[Menger 1930] Karl Menger: „Der Intuitionismus." *Blätter für deutsche Philosophie* 4 (1930), 311-325.

[Mill 1843] John Stuart Mill: *A System of Logic: Ratiocinative and Inductive, Being a Connected View of the Principles of Evidence, and the Methods of Scientific Investigation.* 2 Bde. London: John W. Parker, 1843.

[Minkowski 1909]: Hermann Minkowski: „Raum und Zeit." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18 (1909), 75-88.

[Müller-Lauter 1984] Wolfgang Müller-Lauter: Art. „Nihilismus". In *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Band 6, hg. von Karlfried Gründer. Basel: Schwabe, 1984, Spalte 846-853.

[Münsterberg 1889] Hugo Münsterberg: „Der Zeitsinn." In ders.: *Beiträge zur experimentellen Psychologie, Heft 2.* Freiburg i.B.: Mohr 1889, S. 1-68.

[Neumann 1870] Carl Neumann: *Die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie.* Antrittsvorlesung, Leipzig 1870.

[Newton 1999] Isaac Newton: *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy.* Neuübersetzung von I. Bernard Cohen und Anne Whitman. Berkeley: University of California Press, 1999.

[Newton 2008] Derek T. Whiteside (Hg.): *The Mathematical Papers of Sir Isaac Newton.* Band VII: 1691-1695. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

[Nichols 2007] Ryan Nichols, *Thomas Reid's Theory of Perception*, Oxford: Clarendon Press 2007.

[Nietzsche 1887] Friedrich Nietzsche: *Zur Genealogie der Moral: Eine Streitschrift.* Leipzig: C. G. Naumann, 1887.

[Nietzsche KSA] Friedrich Nietzsche: *Sämtliche Werke.* Kritische Studienausgabe in 15 Bänden, hg. von Giorgio Colli und Mazzino Montinari. dtv/de Gruyter, München und New York 1980.

[Norton 1987] John D. Norton: „Einstein, the Hole Argument and the Reality of Space." In John Forge (Hg.): *Measurement, Realism and Objectivity.* Dordrecht: Reidel, 1987, S. 153-188.

[Norton 2019] John D. Norton: „The Hole Argument." In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Summer 2019 Edition, hg. von Edward N. Zalta. *https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/spacetime-holearg/*

[Nye 1979] Mary Jo Nye: „The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism." *Journal of the History of Ideas* 40 (1979), 107-120.

[Orsucci 1992] Andrea Orsucci: *Dalla biologie cellulare alle scienze dello spirito: Aspetti del dibattito sull'individualità nell'Ottecento tedesco.* Bologna: Società editrice il Mulino, 1992.

[Paulsen 1875] Friedrich Paulsen: *Versuch einer Entwicklungsgeschichte der Kantischen Erkenntnistheorie.* Leipzig: Fues, 1875.

[Paulsen 1892] Friedrich Paulsen: *Einleitung in die Philosophie.* Berlin: Hertz, 1892.

[Paulsen 1898] Friedrich Paulsen: *Immanuel Kant: Sein Leben und seine Lehre.* Stuttgart: Frommann, 1898.

[Peano 1890] Giuseppe Peano: „Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane." *Mathematische Annalen* 36 (1890), 157-160.

[Peckhaus 1999] Volker Peckhaus: „Abduktion und Heuristik." In Julian Nida-Rümelin (Hg.): *Rationalität, Realismus, Revision: Vorträge des 3. internationalen Kongresses der Gesellschaft für analytische Philosophie.* Berlin: De Gruyter, 1999, S. 833-841.

[Poincaré 1891] Henri Poincaré: „Les géométries non euclidiennes." *Revue générale des sciences pures et appliquées* 2 (1891), 769-774.

[Poincaré 1898] Henri Poincaré: „La mésure du temps.“ *Revue de métaphysique et de morale* 6 (1898), 1-13.

[Poincaré 1902a] Henri Poincaré: *La science et l'hypothèse.* Paris: Flammarion, 1902.

[Poincaré 1902b] Henri Poincaré: „Les fondements de la géométrie.“ *Journal des savants* (1902), 252-271.

[Poincaré 1903] Henri Poincaré: „L'espace et ses trois dimensions.“ *Revue de métaphysique et de morale* 11 (1903), 281-301 und 407-429.

[Poincaré 1906] Henri Poincaré: *Der Wert der Wissenschaft.* Ins Deutsche übertragen von E. Weber. Leipzig: B. G. Teubner, 1906.

[Posy 1992] Carl J. Posy (Hg.): *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[Purkert/Ilgauds 1987] Walter Purkert und Hans-Joachim Ilgauds: *Georg Cantor.* Basel: Birkhäuser, 1987.

[Reichardt 1985] Hans Reichardt: *Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie.* Leipzig: Teubner, 1985.

[Reid 1765] Thomas Reid: *An Inquiry into the Human Mind, on the Principles of Common Sense.* 2. Auflage. Edinburgh: A. Millar, 1765.

[Reidemeister 1928] Kurt Reidemeister: „Exaktes Denken.“ *Philosophischer Anzeiger* 3 (1928), 15-47.

[Renouvier 1891] Charles Renouvier: „La philosophie de la règle et du compas: Théorie logique du jugement, dans ses applications aux idées géométriques et à la méthode des géomètres.“ *L'année philosophique* 2 (1891), 1-66.

[Riemann 1868] Bernhard Riemann: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.“ *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13 (1868), 133-150.

[Riesz 1907] Friedrich Riesz: „Die Genesis des Raumbegriffs.“ *Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* 24 (1907), 209-353.

[Rodriguez 2006] Laura Regina Rodríguez Hernández: *Friedrich Riesz' Beiträge zur Herausbildung des Konzepts abstrakter Räume: Synthesen intellektueller Kulturen in Ungarn, Frankreich und Deutschland.* Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2006.

[Ryckman 1991] Thomas A. Ryckman: „Conditio sine qua non? Zuordnung in the early Epistemologies of Cassirer and Schlick.“ *Synthese* 88 (1991), 57-95.

[Rynasiewicz 2014] Rynasiewicz, Robert, „Newton's Views on Space, Time, and Motion.“ In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Summer 2014

Edition, hg. von Edward N. Zalta. *https://plato.stanford.edu/archives/sum2014/entries/newton-stm/*

[Schering 1902] Ernst Schering: *Gesammelte mathematische Werke.* Band 1. Berlin: Mayer & Müller, 1902.

[Schlick 1910] Moritz Schlick: „Die Grenze der naturwissenschaftlichen und philosophischen Begriffsbildung." *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie und Soziologie* 34 (1910), S. 121-142.

[Schlick 1917] Moritz Schlick: *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik: Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie.* Berlin: Julius Springer, 1917.

[Schlick 1919] Moritz Schlick: „Erscheinung und Wesen." *Kant-Studien* 23 (1919), 188-208.

[Schlick 1920] Moritz Schlick: *Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik: Zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie.* Dritte Auflage. Berlin: Julius Springer, 1920.

[Schlick 2006] Moritz Schlick: *Über die Reflexion des Lichtes in einer inhomogenen Schicht / Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik.* Herausgegeben und eingeleitet von Fynn Ole Engler und Matthias Neuber. Moritz Schlick Gesamtausgabe, Band I/2. Wien: Springer, 2006.

[Schlick 2009] Moritz Schlick: *Allgemeine Erkenntnislehre.* Herausgegeben und eingeleitet von Hans-Jürgen Wendel und Fynn Ole Engler. Moritz Schlick Gesamtausgabe, Band I/1. Wien: Springer, 2009.

[Schlick 2013] Moritz Schlick: *Nietzsche und Schopenhauer (Vorlesungen).* Herausgegeben und eingeleitet von Mathias Iven. Moritz Schlick Gesamtausgabe, Band II/5.1. Wien: Springer, 2013.

[Schmidgen 2015] Henning Schmidgen: *Hirn und Zeit: Die Geschichte eines Experiments, 1800-1950.* Berlin: Matthes & Seitz, 2015.

[Scholz 1980] Erhard Scholz: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré.* Basel: Birkhäuser, 1980.

[Scholz 1982] Erhard Scholz: „Herbart's Influence on Bernhard Riemann." *Historia Mathematica* 9 (1982), 413-440.

[Scholz 1996] Erhard Scholz: „Logische Ordnungen im Chaos: Hausdorffs frühe Beiträge zur Mengenlehre." In Egbert Brieskorn (Hg.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Band I: Aspekte seines Werkes.* Wiesbaden: Vieweg, 1996, S. 107-134.

[Schopenhauer 1859] Arthur Schopenhauer: *Die Welt als Wille und Vorstellung.* 2 Bde., dritte, verbesserte und beträchtlich vermehrte Auflage. Leipzig: F. A. Brockhaus, 1859.

[Schur 1886] Friedrich Schur: „Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Riemann'schen Krümmmungsmasses mit den projectiven Räumen.“ *Mathematische Annalen* 27 (1886), 537-567.

[Small 2010] Robin Small: *Time and Becoming in Nietzsche's Thought.* London/New York: Continuum, 2010.

[Stäckel/Engel 1895] Paul Stäckel und Friedrich Engel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss: Eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie.* Leipzig: B. G. Teubner, 1895.

[Stegmaier 2018] Werner Stegmaier: *Europa im Geisterkrieg: Studien zu Nietzsche.* Cambridge: Open Book Publishers. *https://doi.org/10.11647/OBP.0133*

[Tannery 1888] Paul Tannéry: „Sur la notion du temps.“ *Revue philosophique* 26 (1888), 592-595.

[Toepell 1986] Michael Toepell: *Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1986.

[Torretti 1978] Roberto Torretti: *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré.* Dordrecht: D. Reidel, 1978.

[Ueberweg 1851] Friedrich Ueberweg: „Die Principien der Geometrie, wissenschaftlich dargestellt.“ *Archiv für Philologie und Pädagogik* 17/1 (1851), 20-54.

[Ueberweg 1857] Friedrich Ueberweg: *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren.* Bonn: Adolph Marcus, 1857.

[Ueberweg 1889] Friedrich Ueberweg: *Die Welt- und Lebensanschauung Friedrich Ueberwegs in seinen gesammelten philosophisch-kritischen Abhandlungen.* Nebst einer biographisch-historischen Einleitung von Dr. Moritz Brasch, Leipzig, G. Engel, 1889.

[Vailati 1997] Ezio Vailati: *Leibniz & Clarke: A Study of Their Correspondence.* Oxford: Oxford University Press, 1997.

[Veblen/Young 1908] Oswald Veblen und John W. Young: „A set of Assumptions for Projective Geometry.“ *American Journal of Mathematics* 30 (1908), 347-380.

[Voelke 2010] Jean-Daniel Voelke: „Le développement historique du concept d'espace projectif.“ In Lise Bioesmat-Martagon (Hg.): *Éléments d'une biographie de l'espace projectif.* Nancy: Presses Universitaires de Nancy, 2010, S. 207-286.

[Volkert 2013] Klaus Volkert: *Das Unmögliche denken: Die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie im deutschsprachigen Raum (1860-1900).* Heidelberg: Springer, 2013.

[Voltaire 1752] Voltaire (François-Marie Arouet): *Le Micromégas.* London: ohne Verlagsangabe (tatsächlich Paris: Granget), 1752.

[Walter 2007] Scott Walter (Hg.): *La correspondance entre Henri Poincaré et les physiciens, chimistes et ingénieurs.* Basel: Birkhäuser, 2007.

[Walter 2009] Scott Walter: „Hypothesis and Convention in Poincaré's Defense of Galilean Spacetime". In Michael Heidelberger und Gregor Schiemann (Hg.): *The Significance of the Hypothetical in the Natural Sciences.* Berlin: De Gruyter, 2009, S. 193-219.

[Weyl 1918] Hermann Weyl: *Raum, Zeit, Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie.* Berlin: Julius Springer, 1918.

[Wiener 1948] Norbert Wiener: *Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine.* Paris: Hermann & Cie) und Cambridge, Mass.: MIT Press, 1948.

[Wiener Kreis 1929] Der Wiener Kreis: *Wissenschaftliche Weltauffassung.* Herausgegeben vom Verein Ernst Mach. Wien: Artur Wolf, 1929.